Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XVII,** 12.

ANALYTISCHE ARITHMETIK DER POSITIVEN QUADRATISCHEN FORMEN

VON

E. HECKE

HAMBURG

KØBENHAVN

EJNAR MUNKSGAARD

1940

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

§ 1. Methoden und Resultate der Theorie.

In der Theorie der elliptischen Modulfunktionen ist die von mir aufgestellte Theorie der Euler-Produkte nun soweit durchgebildet, dass sie bei der Untersuchung der quadratischen Formen verwendet werden kann; das ist mir von vornherein als ein besonders wichtiges Ziel erschienen.

Der Zusammenhang zwischen Modulfunktionen und positiven ganzzahligen quadratischen Formen von f Variabeln

$$Q = Q(x_1, x_2, \ldots x_f) = Ax_1^2 + Bx_1 x_2 + \ldots \quad (A, B, \ldots \text{ ganz})$$

wird bekanntlich durch die Tatsache gegeben, dass die f-fache über alle ganzen $n_1, \ldots n_f$ zu erstreckende Summe

$$(1) \quad \vartheta(\tau, Q) = \sum_{(n)} e^{2\pi i \tau Q(n_1, \ldots n_r)} = \sum_{n=0}^{\infty} a(n, Q)\, e^{2\pi i n \tau}$$

in der Variabeln τ eine ganze Modulform von der Dimension $-\frac{f}{2}$ ist, die bei einer Kongruenz-Untergruppe einer gewissen »Stufe« N invariant ist. $a(n, Q)$ bedeutet dabei die Anzahl der ganzzahligen Lösungen $(x_1, \ldots x_f)$ von

$$n = Q(x_1, x_2, \ldots x_f),$$

d. h. die Darstellungszahl von n durch Q. Hier ist nun gleich zu bemerken, dass, wenn die Dimension $-\frac{f}{2}$ keine ganze Zahl ist, die Begriffe Invarianz und Stufe einer besonderen Untersuchung und Erklärung bedürfen, die erst in den letzten Jahren durch die Arbeiten von H. PETERSSON gegeben worden ist. Die später einzuführenden Operatoren T_n haben bei Modulformen gebrochener Dimension aber nicht die einfachen Eigenschaften wie bei ganzzahliger Dimension. Deshalb müssen wir uns im Folgenden durchweg auf den Fall beschränken, dass die quadratische Form Q **von grader Variabelnzahl** $f = 2k$ ist. Es gibt alsdann zu Q eine gewisse natürliche Zahl N, sodass für jede Modulsubstitution $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c \equiv 0 \pmod{N}$ gilt

$$(2) \qquad \frac{\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, Q\right)}{(c\tau+d)^k} = \varepsilon(d) \cdot \vartheta(\tau, Q).$$

Hier bedeutet $\varepsilon(d)$ eine durch Q bestimmte arithmetische Funktion von d, (erklärt für jede zu N teilerfremde ganze Zahl d), welche ein quadratischer Restcharakter von d mod N ist. $\varepsilon(d)$ heisse der Charakter von $\vartheta(\tau, Q)$ und auch der **Charakter der quadratischen Form Q.** Die Zahl N, die **Stufe** von ϑ und von Q, ist, abgesehen vom Faktor 2, der Quotient aus der Determinante der Form $2Q$ und dem grössten gemeinsamen Teiler der Unterdeterminanten $(2k-1)$-ten Grades der zu $2Q$ gehörigen Matrix. Die genaue Bestimmung der Stufe und des Verhaltens von $\vartheta(\tau, Q)$ bei beliebigen Modulsubstitutionen ist vor kurzem von B. SCHOENEBERG geleistet worden. Die drei Angaben: »Dimension, Stufe, Charakter«, nach denen in der vorliegenden Theorie die quadratischen Formen klassifiziert werden müssen, mögen als der **Typus** der Form Q oder der Modulform $\vartheta(\tau, Q)$ bezeichnet werden.

In der Funktionentheorie wird nun gezeigt, dass nur endlich viele linear unabhängige Modulformen zu gegebenem Typus existieren, (die genaue Anzahl wird später bestimmt), und ihre Gesamtheit hängt überdies vermöge gewisser Operatoren T_n in sich zusammen. Hieraus ergeben sich Beziehungen zwischen den Thetareihen verschiedener quadratischer Formen desselben Typus, welche darauf hinauskommen, dass die Darstellungszahlen $a(n, Q)$ der verschiedenen Q mit einander zusammenhängen und sich elementar aus den *Darstellungszahlen der Primfaktoren von n* berechnen lassen. Somit resultieren schliesslich rein arithmetische Sätze über quadratische Formen, welche auf noch unbekannte algebraisch arithmetische Zusammenhänge innerhalb der Formentheorie hinweisen. Ihr endgültige Formulierung und Klärung muss zweifellos von der Arithmetik durch neue arithmetische Begriffsbildungen geleistet werden, wie sie bisher erst bei binären und manchen quaternären Formen aufgestellt worden sind.

Die Zurückführung der $a(n, Q)$ auf die mit $n =$ Primzahl findet einen einfachen und vollständigen Ausdruck in einer bisher unbekannten Eigenschaft der zu einer quadratischen Form Q gehörigen Dirichlet-Reihe. Gewisse in ihrer Gesamtheit eindeutig bestimmte lineare Kombinationen dieser Reihen

$$\varphi(s, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n, Q) \cdot n^{-s}$$

und gewisser Teilreihen derselben besitzen nämlich eine Eulersche Produktentwickelung von derselben Art wie die Zetafunktionen imaginärquadratischer Körper — nicht dagegen wie die Riemannsche Zetafunktion. Die Aufstellung dieser Euler-Produkte geschieht durch die funktionentheoretisch definierten Operatoren T_n. Deren arithmetische Bedeutung ist bei den binären quadratischen Formen erkennbar, weil hier die arithmetische Theorie bereits genügend ausgebildet ist, und mag hier auseinandergesetzt werden.

Sei $Q(x_1, x_2) = Ax_1^2 + Bx_1 x_2 + Cx_2^2$ eine positive binäre Form mit ganzem A, B, C, wobei der Einfachheit halber noch die Diskriminante $\Delta = B^2 - 4AC$ kleiner als -4 und gleich der Diskriminante des quadratischen Körpers $K(\sqrt{\Delta})$ vorausgesetzt sei. Die Reihe $\vartheta(\tau, Q)$ hat dann die Stufe $|\Delta|$, die Dimension -1 und den Character $\varepsilon(n)$ = quadratisches Restsymbol $\left(\frac{\Delta}{n}\right)$, wenn $n > 0$. Der Einteilung der Formen Q mit Diskriminante Δ in Klassen äquivalenter entspricht bekanntlich die Einteilung der Ideale des Körpers $K(\sqrt{\Delta})$ in Klassen derart, dass die Dirichlet-Reihe

$$(3) \qquad \varphi(s, Q) = \sum_{(n_1, n_2)} Q(n_1, n_2)^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a(n, Q)\, n^{-s}$$

auch in der Gestalt geschrieben werden kann

$$\frac{1}{2}\varphi(s, Q) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{K}} N(\mathfrak{a})^{-s} = \zeta(s, \mathfrak{K}).$$

Hier durchläuft $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale $\neq 0$ aus einer durch Q umkehrbareindeutig bestimmten Idealklasse $\mathfrak{K}$ des Körpers, $N(\mathfrak{a})$ bedeutet die Norm von $\mathfrak{a}$. In der Arithmetik wird bewiesen, dass die Klassen $\mathfrak{K}$ eine endliche Abelsche Gruppe bilden, und wegen des Fundamentalsatzes der Idealtheorie sind die mit den Gruppencharakteren $\chi(\mathfrak{K})$ gebildeten Summen über die h Klassen $\mathfrak{K}_i$ sämtlich Eulerprodukte, nämlich

$$\zeta(s,\chi) = \sum_{i=1}^{h} \chi(\mathfrak{K}_i)\cdot\zeta(s,\mathfrak{K}_i) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1-\chi(\mathfrak{p})\cdot N(\mathfrak{p})^{-s}\right)^{-1}$$

$$= \prod_{p} \left(1-c(p,\chi)\,p^{-s}+\varepsilon(p)\,p^{-2s}\right)^{-1}.$$

$\mathfrak{p}$ durchläuft die Primideale des Körpers, p die rationalen Primzahlen.

Um die Euler-Produkte zu erhalten, ist es also nötig, neben der einen Reihe $\varphi(s, Q)$ noch die Reihen aller verschiedenen Formenklassen derselben Diskriminante Δ heranzuziehen. Diese Reihen kann man nun aber auch aus einer einzigen beliebigen unter ihnen durch folgenden Prozess herleiten, der nachher zur Definition der Operatoren T_p führt: Es sei zunächst p eine positive rationale Primzahl mit $\varepsilon(p) = +1$, sie zerfällt also im Körper in zwei verschiedene Primideale $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$.

$$p = \mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}'.$$

Nun bilde man diejenige Teilreihe aus der Reihe $\zeta(s, \mathfrak{K})$, welche durch die Zusatzbedingung

$$N(\mathfrak{a}) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p),\ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{K} \tag{4}$$

entsteht. Auf Grund der elementaren Idealtheorie gilt nun offenbar: Wenn $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale $\neq 0$ aus der Klasse $\mathfrak{K}$ mit den jeweils angegebenen Nebenbedingungen durchläuft, so ist

$$\sum_{N(\mathfrak{a})\equiv 0(p)} = \sum_{\mathfrak{a}\equiv 0(\mathfrak{p})} + \sum_{\mathfrak{a}\equiv 0(\mathfrak{p}')} - \sum_{\mathfrak{a}\equiv 0(\mathfrak{p}\cdot\mathfrak{p}')}$$

also speziell in verständlicher Abkürzung

$$\sum_{N(\mathfrak{a})\equiv 0(p)} N(\mathfrak{a})^{-s} = p^{-s}\cdot\zeta(s,\mathfrak{K}\mathfrak{p}') + p^{-s}\cdot\zeta(s,\mathfrak{K}\mathfrak{p}) - p^{-2s}\cdot\zeta(s,\mathfrak{K})$$

$$(5)\quad p^{-s}\cdot\zeta(s,\mathfrak{K})+p^{s}\sum_{N(\mathfrak{a})\equiv 0(p),\,\mathfrak{a}\subset\mathfrak{K}}N(\mathfrak{a})^{-s}=\zeta(s,\mathfrak{K}\mathfrak{p}')+\zeta(s,\mathfrak{K}\mathfrak{p}).$$

Ist andererseits $\varepsilon(p)=-1$, so folgt ebenso elementar:

$$(5\text{a})\quad -p^{-s}\zeta(s,\mathfrak{K})+p^{s}\sum_{N(\mathfrak{a})\equiv 0(p),\,\mathfrak{a}\subset\mathfrak{K}}N(\mathfrak{a})^{-s}=0,\ \text{wenn}\ \varepsilon(p)=-1.$$

Bei festem $\mathfrak{K}$ kann man also offenbar so durch passende Wahl von p und lineare Kombination alle h Reihen $\zeta(s,\mathfrak{K}_i)$ erhalten. Überträgt man jetzt diesen Übergang von $\zeta(s,\mathfrak{K})$ zu den linken Seiten von (5) von den Dirichlet-Reihen auf die Potenzreihen $\vartheta(\tau,Q)$, so gelangt man zur Einführung der Operatoren T_p für jede Primzahl p, erklärt durch

$$(6)\quad \vartheta\,|\,T_p=\varepsilon(p)\cdot\vartheta(p\tau)+\frac{1}{p}\sum_{l=0}^{p-1}\vartheta\left(\frac{\tau+l}{p}\right).$$

Das soll auch für die Primfaktoren p der Stufe $-\Delta$ gelten, wo dann $\varepsilon(p)=0$ ist. Alsdann ist wegen (5) für $\varepsilon(p)=+1$

$$(7)\quad \vartheta(\tau,Q)\,|\,T_p=\vartheta(\tau,Q_1)+\vartheta(\tau,Q_2)$$

wo Q_1, Q_2 gewisse Formen aus je einer durch Q und p völlig bestimmten Klasse bedeuten. Und Ähnliches gilt für die p mit $\varepsilon(p)=-1$ oder 0. Es ist also offenbar möglich, aus der einen Modulform $\vartheta(\tau,Q)$ von der Dimension -1, der Stufe $|\Delta|$ und dem Charakter $\varepsilon(n)$ vermittels der Operatoren T_p und linearer Kombination alle anderen Reihen zur selben Diskriminante zu erhalten, und von deren Dirichlet-Reihen ist dann auf Grund arithmetischer Sätze bekannt, dass sie sich zu der erforderlichen Zahl von Euler-Produkten zusammenfassen lassen. Die Anzahl der linear unabhängigen Euler-Produkte ist ebenso gross wie die Anzahl der unabhängigen Reihen $\vartheta(\tau, Q)$.

Nun zeigt sich, dass die Operatoren T_p, definiert durch (6), unabhängig von ihrer arithmetischen Entstehung, einen Sinn haben für jede Modulform des betreffenden Typus, (für die Dimension $-k$ ist dabei in (6) neben $\varepsilon(p)$ noch der Faktor p^{k-1} anzubringen), überdies aber lassen die Operatoren T_p auch den Typus der Modulform ungeändert, sodass sie hintereinander ausführbar, also komponierbar sind. Die Schar aller Modulformen mit festem Typus geht also bei Anwendung aller T_p in sich über. Und weiter ergibt sich die entscheidende Tatsache, dass alle T_p auf Grund ihrer Definition mit einander vertauschbar sind und dass aus diesem Umstand bereits die Existenz von Euler-Produkten in jeder »abgeschlossenen« Schar folgt. Dabei soll eine lineare Schar von Modulformen — und auch deren Dirichlet-Reihen — **abgeschlossen** genannt werden, wenn sie bei allen Operatoren T_p als Ganzes in sich übergeht. Die Euler-Produkte selbst sind die — bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmten — Individuen der Schar, deren Potenzreihen bei allen T_p sich nur um einen konstanten Faktor ändern, und daher als »**Eigenfunktionen**« der T_p zu bezeichnen sind. Die kleinste abgeschlossene Schar, die eine gegebene Modulform F eines gewissen Typus enthält, wird offenbar erzeugt durch die Menge aller Funktionen, die aus F durch Anwendung aller Operatoren T_p, beliebig oft hintereinander ausgeführt, entsteht. In dieser unendlichen Menge gibt es nur endlich viele linear unabhängige, da alle diese Funktionen vom selben Typus sind. Die nähere Untersuchung führt zu einem finiten Verfahren, um aus F die Erzeugenden dieser abgeschlossenen Schar zu konstruieren. (Satz 42). Auf diese Art sind mehrere der nachher angeführten numerischen Beispiele berechnet worden. Diese kleinste abgeschlossene Schar zu einem F ist offenbar eindeutig bestimmt, und ist Bestandteil jeder abgeschlossenen Schar, die F enthält.

Wendet man nun diese allgemeinen Aussagen auf die speziellen Modulformen $\vartheta(\tau, Q)$ an, die durch quadratische Formen Q von $2k$ Variabeln erzeugt werden, so gilt also der Satz, dass aus jeder solchen Reihe durch mehrfache Anwendung der Operatoren T_p, d. h. durch zusätzliche Kongruenzbedingungen für die Summation in der Ausgangsreihe, wie (4), endlich viele weitere Reihen abgeleitet werden können, die zusammen mit der ersten ein abgeschlossenes System bilden und damit auf Euler-Produkte zurückführbar sind.

Bei der genauen Formulierung des hier vorliegenden Sachverhaltes muss noch eine Modifikation der Aussage eintreten, welche die Primteiler der Diskriminante betrifft. Schon bei den binären quadratischen Formen nämlich, deren Diskriminante nicht Körper-Diskriminante ist, und die bekanntlich gewissen Ring-Idealen zugeordnet sind, betrachtet man üblicherweise nur die Darstellung von solchen Zahlen n durch diese Formen, welche zum Führer des Ringes prim sind. Die Anzahlen $a(n, Q)$ und die Anzahl der Darstellungen von n als Norm von regulären Ringidealen einer bestimmten Ringklasse stimmen dann wieder überein; auch wird Äquivalenz von Ringidealen nur definiert für reguläre Ringideale. Ist n aber nicht teilerfremd zum Führer des Ringes, so lässt sich die Bestimmung von $a(n, Q)$ arithmetisch zurückführen auf die Bestimmung gewisser $a(n^*, Q^*)$, wo n^* prim zum Führer des zu Q^* gehörigen Ringes ist. Die Endformel für das Euler-Produkt der vollständigen Reihe $\sum_i f(\tau, Q_i)$, wo über alle Formenklassen Q_i gegebener Diskriminante zu summieren ist, ist meines Wissens bei binären Formen für allgemeine Zahlringe noch nirgends gegeben und lässt sich wahrscheinlich übersichtlich erst mit den Matrizen $\lambda(n)$ meiner Theorie formulieren. Es hat sich aber für alle Anwendungen als ausreichend gezeigt, nur das spezielle Darstellungsproblem, n prim zum Führer, zu untersuchen und sich mit der grundsätzlichen Zurückführung des allgemeinen auf dieses spezielle zu begnügen. Eine ähnliche Schwierigkeit tritt nun naturgemäss auch bei den allgemeinen quadratischen Formen unserer Theorie auf, und es ist wichtig, dass es in einfacher Weise möglich ist, den Begriff »reguläres Ringideal« unter Beibehaltung der übrigen charakteristischen Eigenschaften der zugehörigen Reihen zu übertragen. Man bilde nämlich die folgende Reihe, die als die **»reduzierte Reihe zu der Form Q«** bezeichnet sei:

$$\tilde{\vartheta}(\tau, Q) = \sum_{(n,N)=1}{}' a(n,Q)\, e^{2\pi i \frac{n\tau}{N}}; \quad \tilde{\varphi}(s, Q) = \sum_{(n,N)=1}{}' a(n,Q)\, n^{-s}.$$

Es ist also dabei nur über diejenigen n zu summieren, die zur Stufe N der ursprünglichen Reihe, oder, was dasselbe ist, zur Determinante der Form $2\,Q$ teilerfremd sind. Der Nenner N im Exponenten ist dabei zweckmässig einzuführen, weil bei dieser Schreibweise $\tilde{\vartheta}(\tau, Q)$ wieder eine Modulform derselben Stufe N ist. Für diese reduzierten Reihen gilt dann eine analoge Theorie wie oben; in der Definition (7) des Operators T_p ist innerhalb der Summe l durch lN zu ersetzen, man braucht jetzt aber nur die T_p heranzuziehen, deren p zur Stufe prim ist, und in den Euler-Produkten fallen natürlich auch alle Primfaktoren der Stufe weg. Die Darstellung der Determinantenteiler durch die Formen Q kann und muss als ein besonderes Problem abgespalten werden, da im allgemeinen bei Berücksichtigung auch dieser Primfaktoren die Euler-Produkte erst nach Adjunktion eines gewissen Matrizenringes aufgestellt werden können.

Für die reduzierten Dirichlet-Reihen $\tilde{\varphi}(s, Q)$ gilt der Hauptsatz meiner Theorie (§ 6, Satz 39), dass jede reduzierte Reihe eindeutig durch gewisse endlich viele, allein von dem Typus der Form Q abhängige »kanonische« Euler-Produkte $\varphi_\rho(s)$ als lineare Kombination darstellbar ist:

$$\tilde{\varphi}(s, Q) = \sum_{\rho}{}' c_\rho \tilde{\varphi}_\rho(s).$$

Als **kanonisch** bezeichne ich Euler-Produkte von der sehr speziellen Bauart

$$\varphi(s) = \prod_p \left(1 - \lambda_p p^{-s} + \varepsilon(p) p^{k-1-2s}\right)^{-1}.$$

Hier ist $\varepsilon(p)$ der in dem Typus der Form Q vorkommende Restcharakter mod N.

Eine entsprechende Aussage gilt nun auch manchmal für die vollständige Reihe $\varphi(s, Q)$, nämlich, in Analogie mit dem Fall binärer Formen, wenn der quadratische Restcharakter $\varepsilon(n)$ in (2), der für positive n mit Hilfe der Diskriminante Δ von Q als

$$\varepsilon(n) = \left(\frac{\Delta}{n}\right)$$

darstellbar ist, ein eigentlicher Charakter mod N ist. Diese Voraussetzung ist jedenfalls dann erfüllt, wenn Δ und damit auch N quadratfreie Zahlen sind. (§ 6, Satz 40).

Im allgemeinen Fall kann die Zurückführung auf kanonische Euler-Produkte erst nach Adjunktion eines gewissen kommutativen Matrizen-Ringes bewerkstelligt werden. Im Zusammenhang damit lassen sich, wenn die Diskriminante ein Quadrat ist, die Anzahlen $a(m, Q)$ mit $(m, N) > 1$ auf die Anzahlen $a(n, Q)$ mit $(n, N) = 1$ zurückführen. Dabei ergeben sich für eine Primzahlstufe $N = q$ speziell bei Variabelnzahlen $\leqq 22$ überraschend einfache Beziehungen von elementar arithmetischem Charakter, die anscheinend in der bisherigen arithmetischem Theorie noch nicht entdeckt sind. (§ 8, Satz 50 und 51).

Die Koeffizienten der kanonischen Euler-Produkte sind algebraische Zahlen. Auf diese Weise ist jeder quadratischen Form Q ein ganz bestimmter algebraischer Zahlkörper zugeordnet. Über die sonstige Bedeutung dieser Irrationalitäten für die Form Q weiss man bisher nichts ausser bei binären Formen. Hier ist dieser Zahlkörper ein reeller Unterkörper des Körpers der h-ten Einheitswurzeln, wo h die Klassenzahl der betr. Diskriminante ist.

Die nächste Frage ist die nach der genaueren Beschaffenheit abgeschlossener Systeme. Ist es vielleicht möglich, als Basis des abgeschlossenen Systems allein mehrere Reihen $\vartheta(\tau, Q)$ zu wählen, ohne dass es nötig wäre, diese Reihen durch die Kongruenzbedingungen zu modifizieren, welche mit den Operatoren T_p zusammenhängen? Das würde bedeuten, dass die Euler-Produkte sich bereits als lineare Kombinationen allein der $\vartheta(\tau, Q)$ darstellen lassen. In diesen Zusammenhang gehört ein wichtiges Resultat von Herrn SIEGEL. In seiner allgemeinen Theorie[1] beweist Herr SIEGEL als Hauptsatz ein Theorem, das, auf den hier betrachteten Fall spezialisiert, lautet: Man bilde ein volles System nicht-äquivalenter quadratischer Formen $Q_1, Q_2, \ldots\ldots Q_\mu$

[1] C. L. SIEGEL, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. Ann. of Math. (2), 36 (1935).

von $2k$ Variabeln aus einem und demselben »Geschlecht«. Es gibt dann μ positive rationale Zahlen $r_1, r_2, \ldots . r_\mu$, sodass

$$(8) \qquad \sum_{l=1}^{\mu} r_l \cdot \vartheta(\tau, Q_l) = E(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \tau}$$

eine sogenannte Eisenstein-Reihe von der Dimension $-k$ ist. Die Entwickelungskoeffizienten c_n dieser Reihe sind Summen von $(k-1)$-ten Potenzen der Teiler von n, jede noch multipliziert mit gewissen quadratischen Restcharakteren nach der Determinante, und daher lässt sich die Dirichlet-Reihe dazu als Summe von Euler-Produkten darstellen. Dass diese Eisenstein-Reihe und also auch diese Euler-Produkte notwendig in jedem abgeschlossenen System enthalten sind, welches aus jeder einzelnen Reihe $\vartheta(\tau, Q_l)$ entsteht, folgt sehr einfach aus meiner Theorie (§ 3).

Hiernach könnte man vermuten, dass vielleicht schon die μ Reihen aller Formen ein und desselben Formengeschlechtes ein abgeschlossenes System bilden. Indessen zeigt ja schon die Theorie der binären Formen, dass diese Vermutung falsch ist, da hier bekanntlich einfache Multiplikationsgesetze für die Darstellungszahlen $a(n, Q)$ erst formulierbar sind, wenn man nicht nur die Formen eines Geschlechtes, sondern gleichzeitig alle primitiven Formen mit derselben Diskriminante in Betracht zieht. Aber auch die $\vartheta(\tau, Q)$ aller primitiven Formenklassen Q der gleichen Diskriminante erzeugen noch keine abgeschlossene lineare Schar, sobald die Variabelnzahl $\geqq 4$ ist. Schon bei quaternären Formen, deren Diskriminante kein Quadrat ist, entsteht ein abgeschlossenes System $\vartheta(\tau, Q)$ erst durch Heranziehung von Formen Q mit mehreren verschiedenen Diskriminanten. Es erweist sich eben als notwendig, zugleich alle Formen von demselben »Typus« zu betrachten, und unter ihnen kommen im allgemeinen solche mit verschiedenen Diskriminanten vor. Für eine Inangriffnahme der arithmetischen Theorie der quadratischen Formen ist diese Erkenntnis sehr wichtig, dass man zu den vollständigen und einfachen Multiplikationsgesetzen der Darstellungszahlen $a(n, Q)$ erst gelangen kann, indem man Systeme von Formen mit verschiedenen Diskriminanten betrachtet. In ähnlicher Richtung liegen die Gedankengänge, welche in den letzten Jahren von Herrn H. Brandt[1] über »Stammformen«, »Stammdiskriminanten« usw. entwickelt worden sind. Indessen auch für volle Systeme von Stammformen mit gleicher Diskriminante lassen sich die vollständige Aussagen noch nicht formulieren; dies zeigen schon meine Beispiele von quaternären Formen mit Diskriminante 29 und 37, wo man die (adjungierten) Formen mit Diskriminante 29^3 und 37^3 hinzunehmen muss.

Ob endlich das System aller $\vartheta(\tau, Q)$ von festem Typus nun in jedem Falle auch wirklich abgeschlossen ist, lässt sich vorläufig mit den Mitteln der Funktionentheorie allgemein nicht entscheiden. In der linearen Schar aller Modulformen des gegebenen Typus kann man bisher diejenigen Individuen, welche *gleich* einer Thetareihe $\vartheta(\tau, Q)$ sind, durch funktionentheoretische Eigenschaften noch nicht charakterisieren, ja nicht einmal die Schar aller linear durch solche Thetas darstellbarer Modulformen irgendwie kennzeichnen. Nur für jeden numerisch gegebenen Typus lassen sich diese Fragen rechnerisch vollständig erledigen. Dass hier noch spezifisch arithmetische neue Begriffsbildungen nötig sind, folgt auch aus der Tatsache, dass es

[1] H. Brandt, Zur Zahlentheorie der quadratischen Formen, Jahresber. d. Dtsch. Math. Ver. XLVIII (1936).

quadratische Formen Q_1, Q_2 gibt, welche nicht unimodular äquivalent sind, aber doch dieselbe Thetareihe $\vartheta(\tau, Q_1) = \vartheta(\tau, Q_2)$ haben. Beispiele hierfür (bei 16 und mehr Variabeln und der Diskriminante 1) verdanke ich einer Mitteilung von Herrn E. Witt (Hamburg). Eine Reihe numerischer Beispiele in 4, 6, 8, ... Variabeln, die ich im Folgendem vorführe, zeigt, dass das System aller $\vartheta(\tau, Q)$ des betr. Typus abgeschlossen ist, da hier sogar alle Modulformen dieses Typus durch jene Thetareihen darstellbar sind. Bei binären Formen ist alles arithmetisch so genau bekannt, dass durch unsere Methode keine neue Aussage geliefert wird. Bei quaternären komponierbaren Formen (ihre Diskriminante ist ein Quadrat) ist die arithmetische Theorie durch Herrn Brandt soweit durchgebildet, dass sich die Abgeschlossenheit der fraglichen Systeme beweisen lässt und man hier auch die angemessene arithmetische Formulierung der Eulerprodukt-Eigenschaft angeben kann. (§ 9).

Die einfachsten quadratischen Formen sind die mit der Diskriminante 1. Ihre Variabelnzahl muss durch 8 teilbar sein, die Stufe ist 1. Ihre Theorie lässt sich vollständig durchführen, die entsprechenden Thetareihen fester Dimension bilden immer ein abgeschlossenes System, und dieses enthält genau die erforderliche Zahl von Euler-Produkten; überdies lässt sich sogar jede Modulform des betreffenden Typus linear durch diese Thetareihen darstellen.

Die quadratischen Formen von ungerader Primzahlstufe q sind dann schon hinreichend allgemein, um die Verhältnisse des allgemeinen Falles erkennen zu lassen, und sind andrerseits funktionentheoretisch einfach genug, um ohne gar zu viele Fallunterscheidungen ein klares Bild von den Grundtatsachen der Theorie zu geben. Die nachher angeführten Beispiele beziehen sich alle auf solche Formen.

Dabei zeigt sich für Formen mit quadratischer Diskriminante ein bemerkenswerter Unterschied bei den Variabelnzahlen $\geqq 24$ gegenüber den anderen: Für 24 und mehr Variable (ausser 28) treten bei den Primfaktoren der Determinante neue arithmetische Konstanten auf. Der analytische Grund ist das Vorhandensein von Spitzenformen der 1. Stufe bei den Dimensionen $-k$ mit $k \geqq 12$. (§ 8, Satz 51).

Endlich besteht aber zwischen quadratischen Formen mit *verschiedenen Variabelnzahlen* noch ein Zusammenhang anderer Art, der ebenfalls durch die Methoden der Funktionentheorie in seiner Allgemeinheit aufgedeckt wird. Die arithmetische Bedeutung der so entstehenden Relationen ist aber zur Zeit noch ganz unverständlich. Dieser Zusammenhang beruht darauf, dass durch eine quadratische Form Q in f Variabeln ausser der oben mit $\vartheta(\tau, Q)$ bezeichneten Reihe noch unendlich viele andere Modulfunktionen der Dimensionen $-\left(\frac{f}{2}+\nu\right)$ $(\nu = 0, 1, 2 \ldots$ in inf.) erzeugt werden; als Entwickelungskoeffizienten der Potenzreihen werden dabei nicht die Darstellungszahlen $a(n, Q)$ selbst genommen, sondern jede Darstellung von n durch die Form Q wird noch mit einem Gewicht behaftet, was noch auf unendlich viel verschiedene Arten möglich ist. Es bedeute nämlich $P_\nu(x_1, \ldots, x_f)$ ein homogenes Polynom von der Dimension ν in den Variabeln x_i, und es sei P_ν überdies eine »Kugelfunktion in Bezug auf die quadratische Form Q«, d. h. nach einer linearen Transformation der x, durch welche Q eine Summe von Quadraten wird, soll P_ν eine Kugelfunktion der neuen f Variabeln sein. Man bilde jetzt die f-fach unendliche Reihe

$$\vartheta\left(\tau, Q, P_\nu\right) = \sum_{(n)} P_\nu\left(n_1, n_2, \ldots, n_f\right) e^{2\pi i \tau Q(n_1 \ldots, n_f)}.$$

Diese Funktionen von τ erweisen sich wieder als Modulformen eines gewissen Typus $\{-k, N, \varepsilon(a)\}$, ihre Dimension ist $-\left(\frac{f}{2}+\nu\right)$, während ihre Stufe N und ihr Charakter $\varepsilon(a)$, von ν unabhängig, nur von Q abhängen. Man kann also mit diesem Ansatz auf sehr verschiedenartige Weise Modulformen des gleichen Typus erhalten. Und es werden daher im allgemeinen lineare Relationen zwischen diesen Reihen bestehen müssen. Während für ungerade ν obige Reihe offenbar identisch verschwindet, entstehen für gerade ν vielfach brauchbare Reihen. In einzelnen numerischen Fällen, wie Q = Summe von Quadraten, hat man schon früher[1] solche Identitäten gelegentlich bewiesen. Bei binären Formen, $f = 2$, sind die P_ν arithmetische Funktionen, welche als »Grössencharaktere« in der Theorie der imaginär quadratischen Körper schon bekannt sind. Mit ihrer Hilfe kann man die zu einander reziproken Idealklassen, die ja nach (3) zu derselben Thetareihe führen, auch funktionentheoretisch von einander trennen, und Ähnliches scheint auch bei Formen von mehr Variabeln möglich zu sein, wo man z. B. durch die P_ν die früher erwähnten verschiedenen Klassen quadratischer Formen mit derselben Thetareihe auseinander halten kann. Im binären Fall bilden die Reihen von festem Typus und festem ν ein abgeschlossenes System, wie die Arithmetik durch Aufstellung der Euler-Produkte zeigt. Ich gebe später für quaternäre Formen ein Beispiel mit der entsprechenden Eigenschaft (Beispiel 12 in § 11).

[1] Systematische elementare Beweise für solche Identitäten finden sich in einer neueren Arbeit von A. Walfisz, Zur additiven Zahlentheorie V., Travaux de l'Inst. Mathém. de Tbilissi V, 1938. Dort auch ausführliche Angaben der neueren Litteratur von Uspensky, Boulyguine, Bessel.

Die quaternären Formen sind vor Formen mit andern Variabelnzahlen funktionentheoretisch ausgezeichnet. Denn ihre Thetareihen sind Modulformen der Dimension -2; sie werden also nach Addition passender Eisenstein-Reihen zu Integranden 1. Gattung für die betr. Stufe. Im Zusammenhang damit erhebt sich die Frage, ob umgekehrt alle Integranden 1. Gattung durch solche Thetareihen linear darstellbar sind. Das ist für die Funktionentheorie wichtig, da man bisher noch keine andern Methoden zur Konstruktion der Reihen für diese Integranden besitzt. Gruppentheoretische Überlegungen lassen vermuten, dass man tatsächlich durch die Thetareihen nur einen Teil aller Integrale erhält, denn es scheint nicht möglich zu sein, eine Funktion von nicht-reellem Typus linear aus vierfachen Thetareihen darzustellen. Die entsprechende Frage für die Modulformen der andern Dimensionen ist ebenfalls noch ungelöst. Doch wird man vermutlich für die grösseren Variabelnzahlen $6, 8, \ldots$ alle ganzen Modulformen der Dimensionen -3, $-4, \ldots$ durch solche Thetareihen konstrueiren können.

In § 2 und 3 wird nach einer kurzen Übersicht über die vorhandenen Sätze der Funktionentheorie die allgemeinen Theorie der Modulfunktionen in der Richtung weitergeführt, die für die nächsten Anwendungen nötig ist. Nach Einführung der Grundbegriffe Stufe, Charakter und Typus für quadratische Formen in § 4 wird in § 5 eine Zusammenstellung der Hauptsätze über Kugelfunktionen von f Variabeln gegeben. § 6 bringt dann den Übergang zu quadratischen Formen, vermittelt durch die Thetareihen, und übersetzt die Tatsachen der Funktionentheorie in die Sprache der quadratischen Formen, wobei als Hauptsätze die Sätze 39, 40 ausgesprochen werden. In den folgenden Paragraphen werden dann die allgemeinen Theoreme spezialisiert und weiter ausgeführt für die einfachsten nichttrivialen quadratischen Formen, in § 7 wird der Zusammenhang der quadratischen Formen mit Diskriminante 1 bei 8 und 24 Variabeln mit der Funktion $\Delta(\tau)$ aus der Weierstrass'schen Theorie klargelegt, in § 9 die einfache arithmetische Formulierung des Euler-Produktes bei gewissen Formen von 4 Variabeln und der Zusammenhang mit der Quaternionen-Theorie von Herrn Brandt auseinandergesetzt. Zum Schluss wird in § 11 eine Reihe numerischer Beispiele für Formen von 4, 6, 8, 10 und 12 Variabeln vorgeführt.

Bezeichnungen. »Quadratische Form« ohne weiteren Zusatz bedeutet hier stets positive ganzzahlige quadratische Form einer graden Zahl von Variabeln im Sinne von § 4; die Zahl der Variabeln wird meist mit f bezeichnet, die Form mit $Q(x_1, x_2, \ldots x_f)$ oder $Q(x)$ oder $Q((x))$. Die Bedeutung von »abgeschlossener Schar« und »invarianter Schar«, welche ich hier in einer zweckmässigeren Art, anders als gelegentlich bisher gebraucht, einführe, findet sich in § 2 und 3. Die Stufe einer Modulfunktion heisst N, oder, wenn hervorgehoben werden soll, dass sie eine ungrade Primzahl ist, auch q. Die Diskriminante der quadratischen Form Q wird mit Δ bezeichnet. Sie ist die Determinante der Form $2Q$, multipliziert mit $(-1)^{\frac{f}{2}}$.

Ferner wird stets gesetzt

$$z = e^{2\pi i\tau}, \quad z_m = e^{\frac{2\pi i\tau}{m}}.$$

§ 2. Das Verhalten der Modulfunktionen höherer Stufe bei den Substitutionen der Modulgruppe.

Bezüglich der allgemeinen Grundbegriffe der Theorie der elliptischen Modulfunktionen verweise ich zunächst auf die Zusammenstellung in § 1 meiner Arbeit (T_n I[1]). Sei L die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ einer beliebigen reellen Substitution mit positiver Determinante. Wir definieren den Operator L für eine Funktion $F(\tau)$ durch

$$(9) \qquad F(\tau)\,|\,L = \frac{F\left(\dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)}{(c\tau + d)^k}.$$

Ich übernehme damit eine von Herrn Petersson bemerkte Vereinfachung, welche für die inhomogen geschriebene Modulform noch etwas durchsichtiger ist als die ursprünglich von mir benutzte Bezeichnung. Sind L_1, L_2 die Matrizen zweier solcher Substitutionen und $L = L_1 L_2$ die Produktmatrix im Sinne der Matrizen-Multiplikation, so gilt

$$F\,|\,L = F\,|\,L_1 L_2 = (F\,|\,L_1)\,|\,L_2.$$

Gehört speziell L zur homogenen $\bar{\Gamma}(N)$ und ist F eine Modulform der Art $(-k, N)$, so ist

$$F\,|\,L = F, \text{ wenn } L \subset \bar{\Gamma}(N);$$

und das Bestehen dieser Gleichung für alle diese L ist auch gleichwertig mit der Aussage, dass $F(\tau)$ eine Funktion der Stufe N ist. Man beachte, dass nach (9)

$$(10) \qquad F\,\Big|\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^k F.$$

Die nächsten Definitionen beziehen sich auf beliebige, aber fest gedachte Werte k, N. Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rationale

[1] E. Hecke, Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerschen Produktentwickelung I, II. Math. Ann. 114 (1937), S. 1 und S. 316, im folgenden zitiert als T_n I und T_n II.

Zahlen, deren Nenner zu N prim sind, und $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{N}$. Mit

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

bezeichnen wir die Matrix einer Substitution aus $\bar{\Gamma}(1)$, welche mod N kongruent $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ ist. Das Zeichen $F \Big| \begin{bmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$ ist dann also eindeutig bestimmt, falls F eine Funktion der Stufe N ist. Speziell setzen wir

$$R_n = \begin{bmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & n\end{bmatrix} \tag{11}$$

für jede ganze zu N teilerfremde Zahl n.

Endlich bezeichnen wir die beiden erzeugenden Modulsubstitutionen aus $\bar{\Gamma}(1)$

$$U = \begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Jede Modulform $F(\tau)$ von der Art $(-k, N)$ besitzt eine Entwickelung

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_N^n \quad \left(z_N = e^{\frac{2\pi i \tau}{N}}\right), \tag{13}$$

und eine Entwickelung der gleichen Art besteht auch für alle $F|L$ bei beliebigen Substitutionen L der Modulgruppe. Sind die konstanten Glieder c_0 in allen diesen Reihen 0, so heisst $F(\tau)$ eine **Spitzenform.** Ferner heisst $F(\tau)$ **vom Teiler** t $(t \geq 1)$, wenn alle in der Reihe (13) vorkommenden Exponenten n mit der Stufe N den gr. gem. Teiler t haben. Damit $F(\tau)$ vom Teiler N ist, ist notwendig und hinreichend, dass

$$F|U = F.$$

$F(\tau)$ heisst **normiert**, wenn sie bei allen R_n sich nur um einen konstanten Faktor $\varepsilon(n)$ ändert:

$$F \mid R_n = \varepsilon(n) F.$$

Dieses $\varepsilon(n)$ ist offenbar ein Restcharakter von n mod N und heisst der **Charakter** von $F(\tau)$. Wegen (10) kommen zu gegebenen k nur Charaktere vor mit

$$\varepsilon(-1) = (-1)^k.$$

Für unsere arithmetischen Anwendungen sind nun besonders wichtig die *normierten Funktionen vom Teiler* N. Sie stehen in ausgezeichneter Beziehung zu der Untergruppe $\Gamma_0(N)$ von $\Gamma(1)$, welche durch

$$(14) \qquad \Gamma_0(N): L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \subset \Gamma(1), \quad c \equiv 0 \pmod N$$

definiert ist. Diese Untergruppe wird durch U und die R_n erzeugt. Zu jeder Modulform der Art $(-k, N)$, welche normiert und vom Teiler N ist, gehört ein Charakter $\varepsilon(n)$ mod N, definiert durch

$$F \mid L = \varepsilon(d) \cdot F, \text{ wenn } L \subset \Gamma_0(N).$$

Eine solche $F(\tau)$ heisse »**vom Typus** $(-k, N, \varepsilon(d))$«. Der **Haupttypus** ist der, wo $\varepsilon(n)$ der Hauptcharakter, d. h. identisch 1 ist. Jeder andere Typus heisse **Nebentypus.** Die Funktionen vom Haupttypus sind die (relativen) Invarianten von $\Gamma_0(N)$. Solche gibt es nur für grade Dimension $-k$, weil mit L auch $-L$ zu $\Gamma_0(N)$ gehört und $\varepsilon(-1) = (-1)^k$ ist. Für unsere Anwendungen sind vor allem die Funktionen von **reellem** Typus wichtig, d. h. die mit reellem $\varepsilon(n)$. Bei ungerader Primzahlstufe $N = q$ existieren als reelle Charaktere nur diese zwei:

1) $\varepsilon(n) = 1$. (dabei k grade)

2) $\varepsilon(n) =$ quadratisches Restsymbol $\left(\frac{n}{q}\right)$.

Der zweite kommt wieder nur für solche k vor, wo $(-1)^k = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$,

$$k \equiv \frac{q-1}{2} \pmod 2. \tag{15}$$

Wir leiten jetzt einige Sätze über die Anzahl linear unabhängiger Funktionen mit gegebenem Typus her.

Der Index der Gruppe $\Gamma_0(N)$ innerhalb der inhomogenen vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$ ist

$$\mu_0(N) = N \cdot \prod_q \left(1 + \frac{1}{q}\right). \tag{16}$$

q durchläuft dabei die verschiedenen Primfaktoren von N.

Die Anzahl der rationalen Spitzen des Fundamentalbereiches von $\Gamma_0(N)$ ist

$$\sigma_0(N) = \sum_{t \mid N} \varphi\left(t, \frac{N}{t}\right). \tag{17}$$

Dabei bedeutet $\varphi(n)$ die Eulersche Funktion (Anzahl der reduzierten Restklassen mod n) und t durchläuft die positiven Teiler von N.

Endlich ist das Geschlecht des Fundamentalbereiches von $\Gamma_0(N)$ gleich

$$p_0(N) = 1 + \frac{\mu_0(N)}{12} - \frac{\nu_1}{3} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{1}{2}\sigma_0(N). \tag{18}$$

Hier ist

$$\nu_1 = \begin{cases} 0, \text{ wenn } N \text{ durch 2 oder 9 teilbar,} \\ \prod_q \left(1 + \left(\frac{-3}{q}\right)\right) \text{ in jedem andern Fall.} \end{cases}$$

$$\nu_2 = \begin{cases} 0, \text{ wenn } N \text{ durch 4 teilbar,} \\ \prod\limits_q \left(1 + \left(\frac{-4}{q}\right)\right) \text{ in jedem andern Fall.} \end{cases}$$

q durchläuft in diesen beiden Produkten die ungeraden Primteiler von N.

Eine Modulform vom Haupttypus, d. h. eine (relative) Invariante von $\Gamma_0(N)$ hat dann bekanntlich genau

$$\alpha(N) = \mu_0(N) \cdot \frac{k}{12} \tag{19}$$

Nullstellen im Fundamentalbereich von $\Gamma_0(N)$, gemessen in den richtigen Ortsvariabeln von $\Gamma_0(N)$, wenn $-k$ ihre Dimension ist. ($\alpha(N)$ braucht keine ganze Zahl zu sein, im Hinblick auf die elliptischen Ecken von $\Gamma(1)$, die nicht solche von $\Gamma_0(N)$ sind).

Eine Funktion vom Teiler N besitzt eine Entwickelung

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \left(z = e^{2\pi i \tau}\right). \tag{20}$$

Ortsvariable für die Spitze $\tau = \infty$ ist z, daher folgt sogleich

Satz 1: Wenn bei einer Funktion $F(\tau)$ vom Haupttypus die ersten Koeffizienten a_n in (20) verschwinden für alle $n \leqq \frac{\mu_0(N) \cdot k}{12} + 1$, so ist die Funktion $F(\tau)$ identisch Null.

Da ferner das Quadrat einer jeden Funktion von reellem Typus eine Funktion vom Haupttypus ist, so folgt weiter:

Satz 2: Wenn bei einer Funktion von reellem Typus in ihrer Potenzreihe (20) die ersten Koeffizienten a_n verschwinden für alle $n \leqq \frac{\mu_0(N)\, k}{12} + 2$, so ist die Funktion identisch Null.

Für die Anzahl linear unabhängiger Funktionen von gegebenem reellem Typus ergibt sich hieraus als obere Schranke die Zahl $\alpha(N)+2$. Die genaue Anzahl, die im allgemeinen kleiner ist, lässt sich mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes ermitteln, sobald $k \geqq 2$. Denn der Quotient von zwei Funktionen desselben Typus ist offenbar eine absolute Invariante der Gruppe $\Gamma_0(N)$ mit höchstens $\alpha(N)$ Polen. Speziell ist bei $k=2$:

Satz 3: Die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen eines Haupttypus $(-2, N, 1)$ mit $k=2$ ist

$$p_0(N)+\sigma_0(N)-1\,.$$

Hierbei sind $p_0(N)$ und $\sigma_0(N)$ durch (17), (18) bestimmt. $p_0(N)$ gibt die Anzahl der Spitzenformen in der Schar an, sie sind gleichzeitig die Integranden 1. Gattung zu $\Gamma_0(N)$; und $\sigma_0(N)-1$ ist die Anzahl der Eisensteinreihen in der Schar, diese sind die Integranden 3. Gattung, deren logarithmische Singularitäten nur in den $\sigma_0(N)$ rationalen Spitzen von $\Gamma_0(N)$ liegen.

Die fraglichen Anzahlen für die anderen Typen geben wir nur für ungerade Primzahlstufe $N=q$ an. Sie sind in einer Arbeit von H. Feldmann berechnet worden, treten dort aber zunächst in einer anderen Bedeutung auf.

Die Modulformen von der Art $(-k, N)$ müssen nämlich noch in schärferer Art eingeteilt werden, nach ihrem Verhalten bei der vollen Modulgruppe $\bar{\Gamma}(1)$, statt nur bei $\bar{\Gamma}_0(N)$. Da $\bar{\Gamma}(N)$ ein Normalteiler von $\bar{\Gamma}(1)$ (von endlichem Index) ist, so gehört mit einer Funktion $F(\tau)$ auch jede mit ihr »konjugierte« Funktion $F|L$ wieder zur Stufe N, wobei L eine beliebige Substitution aus $\bar{\Gamma}(1)$ ist. Die linear unabhängigen unter den Konjugierten zu F erfahren also bei den Operatoren aus $\bar{\Gamma}(1)$ lineare homogene Substitutionen, welche in ihrer Gesamtheit offenbar eine Darstellung der endlichen binären homogenen Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(N)$ mod N bilden. Diese Darstellung ist durch F eindeutig (im Sinne der Theorie äquivalenter Darstellungen) bestimmt und werde mit $\mathfrak{D}(F)$ bezeichnet. Eine lineare Schar von Modulformen heisse ferner eine **invariante Schar**, wenn sie bei den Operatoren aus $\bar{\Gamma}(1)$ als Ganzes in sich übergeht. Jede invariante Schar der Stufe N definiert wieder eine völlig bestimmte Darstellung der Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(N)$ durch das Verhalten ihrer Basiselemente bei $\bar{\Gamma}(1)$. Speziell ist die Schar *aller* Spitzenformen von der Art $(-k, N)$ invariant; die zugehörige Darstellung von $\overline{\mathfrak{M}}(N)$ werde mit

$$(21) \qquad \mathfrak{S}_k(N)$$

bezeichnet. Ebenso bilden die Eisenstein-Reihen der Art $(-k, N)$ eine invariante Schar, die entsprechende Darstellung von $\overline{\mathfrak{M}}(N)$ heisse

$$(22) \qquad \mathfrak{P}_k(N).$$

Sie ist mit der Permutationsgruppe der rationalen Zahlenpaare mod N bei den Substitutionen der homogenen Modulgruppe verknüpft.

Die elementaren Bausteine der invarianten Scharen sind die **irreduziblen invarianten Scharen**, d. h. solche, die keine echten invarianten Teilscharen enthalten; die zugehörigen Darstellungen von $\overline{\mathfrak{M}}(N)$ sind irreduzibel. Jede irreduzible invariante Schar wird durch ein beliebiges ihrer Elemente und dessen Konjugierte erzeugt (aber nicht umgekehrt).

Die Anzahl der linear unabhängigen Modulformen von festem Typus lässt sich dann auf folgende Weise bestimmen: Man stelle zunächst fest, wieviel Funktionen des betreffenden Typus in einer invarianten Schar mit gegebener irreduzibler Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\overline{\mathfrak{M}}(N)$ enthalten sind. Das ist eine elementare Aufgabe der Darstellungstheorie. Sodann bestimme man die Vielfachheit, mit welcher $\mathfrak{D}$ in der funktionentheoretisch definierten Darstellung

$$\mathfrak{P}_k(N) + \mathfrak{S}_k(N)$$

enthalten ist, die zur Schar aller Modulformen der Art $(-k, N)$ gehört. Aus beidem folgt sofort die gesuchte Anzahl. Die ziemlich mühsame Bestimmung von $\mathfrak{S}_k(N)$ ist durch mehrere Hamburger Arbeiten[1] geleistet worden, falls N eine ungerade Primzahl q oder das Quadrat einer solchen ist. Übrigens lassen sich die fraglichen Anzahlen auch ohne Heranziehung der irreduziblen Darstellungen für eine beliebige Stufe N allein mit dem Riemann-Rochschen Satz bestimmen, doch sind die ebenfalls recht mühsamen Rechnungen noch nicht durchgeführt worden.

Ich gebe hier explizite nur das Resultat für ungerade Primzahlstufe $N = q$ an. Es werde von nun ab mit $\chi(n)$ der quadratische Restcharakter $\left(\frac{n}{q}\right)$ bezeichnet.

Satz 4: Irreduzible Darstellungen $\mathfrak{D}(F)$, welche durch eine Form F von reellem Typus mit $N = q$ erzeugt werden, gibt es nur die folgenden:

1) Für den Haupttypus $(-k, q, 1)$ eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}_q$ vom Grade q, und ferner die identische Darstellung $\mathfrak{E}$, wo F sogar schon bei der vollen Gruppe $\overline{\Gamma}(1)$ invariant ist. k ist dabei notwendig grade.

[1] E. Hecke, Über ein Fundamentalproblem aus der Theorie der ellipt. Modulfunkt., Abh. a. d. Math. Seminar Hamburg 6 (1928). — H. Feldmann, Über das Verhalten der Modulfunktionen von Primzahlstufe bei beliebigen Modulsubstitutionen, Abh. a. d. Math. Seminar Hamburg 8 (1931). — H. Spies, Die Darstellung der inhomogenen Modulargruppe mod q^n ....., Math. Ann. 111 (1935).

2) Für den reellen Nebentypus $\left(-k, q, \chi(d)\right)$ je zwei irreduzible Darstellungen $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}, \mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ des Grades $\frac{q+1}{2}$. Die Charaktere dieser Darstellungen sind algebraisch konjugierte Zahlen aus dem Körper $K\left(\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}} q}\right)$. Mit Rücksicht auf (15) muss dabei sein

$$k \text{ grade, wenn } q \equiv 1 \pmod 4,$$
$$k \text{ ungrade, wenn } q \equiv 3 \pmod 4.$$

In jeder der vier erwähnten irreduziblen invarianten Scharen ist dabei stets nur eine einzige Funktion des betreffenden Typus vorhanden (abgesehen von konstanten Faktoren).

Es werde nun gesetzt bei ungrader Primzahlstufe $N = q$

$$(23)\quad \begin{cases} e(k) = \text{Vielfachheit von } \mathfrak{E} \text{ in } \mathfrak{S}_k(q), \text{ d. h. gleich der Anzahl der Spitzenformen 1. Stufe.} \\ x(k) = \text{Vielfachheit von } \mathfrak{G}_q \text{ in } \mathfrak{S}_k(q), \\ y_1(k) \text{ und } y_2(k) \text{ resp.} = \text{den Vielfachheiten, mit denen die unter 2) erwähnten Darstellungen } \mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}, \mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}} \text{ in } \mathfrak{S}_k(q) \text{ enthalten sind,} \\ Y(k) = y_1(k) + y_2(k). \end{cases}$$

Satz 5: Die Anzahl der Spitzenformen vom Haupttypus $(-k, q, 1)$ ist gleich $e(k) + x(k)$, die Anzahl derer vom reellen Nebentypus $\left(-k, q, \left(\frac{d}{q}\right)\right)$ gleich $Y(k)$.

Jene drei Anzahlen lassen sich nun nach den Resultaten von H. Feldmann folgendermassen als arithmetische Funktionen von k, q ausdrücken:

Satz 6: $e(k) = \left[\frac{k}{12}\right]$, wenn $k \not\equiv 2 \pmod{12}$, $k \geqq 4$.

$$e(k) = \left[\frac{k}{12}\right] - 1, \text{ wenn } k \equiv 2 \pmod{12},\ k > 2;\ e(2) = 0.$$

Satz 7: $x(k) = (k-1)\left[\frac{q}{12}\right] + \frac{k}{2} - 1 + \frac{\varepsilon + \varepsilon_3}{2}$

$$-\varepsilon\left(\frac{k}{2} - \left[\frac{k}{4}\right]\right) - \varepsilon_3\left(\frac{k}{2} - \left[\frac{k}{3}\right]\right),$$

$$\text{speziell } x(2) = p_0(q) = \left[\frac{q}{12}\right] - \frac{\varepsilon + \varepsilon_3}{2}.$$

Satz 8: $Y = Y(k)$ hat die Werte (für $q \neq 3$):

a) $q \equiv 1 \pmod 4$, k grade:

$$Y = (k-1)\left[\frac{q}{12}\right] + \frac{k}{2} + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} - \left[\frac{k}{4}\right] + \left[\frac{k}{12}\right] - 2$$

$$-\varepsilon_2\left(\frac{k}{2} - 2\left[\frac{k}{4}\right]\right) - \varepsilon_3\left(\frac{k}{2} - \left[\frac{k}{3}\right]\right) + \delta_k$$

b) $q \equiv 3 \pmod 4$, k ungrade (aber $k > 1$!):

$$Y = (k-1)\left[\frac{q}{12}\right] + (k-1)\frac{1-\varepsilon_2}{2} + \left[\frac{k}{3}\right](1+\varepsilon_3) - 1.$$

Satz 9: a) $q \equiv 1 \pmod 4$: $y_1 = y_2 = \frac{1}{2}Y$

b) $q \equiv 3 \pmod 4$ und $q \neq 3$:

$$y_1 = \frac{Y+h}{2}, \quad y_2 = \frac{Y-h}{2}.$$

In diesen Formeln bedeutet $[a]$ die grösste ganze Zahl $\leq a$; $h = h(\sqrt{-q})$ die Anzahl der Idealklassen im Körper $K(\sqrt{-q})$,

$$\varepsilon = \left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}, \ \varepsilon_2 = \left(\frac{2}{q}\right) = (-1)^{\frac{q^2-1}{8}}, \ \varepsilon_3 = \left(\frac{-3}{q}\right) = \left(\frac{q}{3}\right).$$

$$\delta_k = 0, \text{ wenn } k \equiv 2 \pmod{12}; \ \delta_k = 1 \text{ sonst.}$$

Satz 10: Für $q = 3$ ist $x(k) = \left[\frac{k-2}{4}\right]$

$$Y(k) = \left[\frac{k-3}{6}\right] + \left[\frac{k}{6}\right] \quad (k \geqq 3)$$

$$y_1(k) = y_2(k) = \frac{1}{2} Y(k), \text{ wenn } k \not\equiv 1 \pmod 6$$

$$y_1(k) = y_2(k) + 1, \text{ wenn } k \equiv 1 \pmod 6.$$

Unter den Modulformen eines jeden Typus gibt es stets auch Eisenstein-Reihen, diese sind bekanntlich keine Spitzenformen. Wir brauchen die genauen Werte der Entwickelungs-Koeffizienten:

Satz 11: Zum Haupttypus $(-k, q, 1)$ gibt es genau zwei Eisenstein-Reihen, wenn k grade und $k > 2$, dagegen nur eine Reihe, wenn $k = 2$. Bei $k > 2$ gehört genau eine Reihe bereits zur 1. Stufe. Die Reihen sind

$$k > 2: \quad G_k(\tau) = \rho_k + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)\, z^n \quad \text{(zur 1. Stufe gehörig)}$$

$$\text{und } G_k(q\tau)$$

$$k = 2: \; E_q(\tau) = \frac{q-1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} d_q(n)\, z^n = G_2(\tau) - q\, G_2(q\tau).$$

Hierbei ist gesetzt

$$\rho_k = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{(k-1!}{(2\pi)^k} \cdot \zeta(k)$$

$$\sigma_r(n) = \sum_{d \mid n} d^r = \text{Summe der } r\text{-ten Potenzen der positiven Teiler von } n,$$

$$d_q(n) = \sum_{(d,q)=1} d = \text{Summe der positiven, zu } q \text{ primen Teiler von } n.$$

Satz 12: Zum Nebentypus $\left(-k, q, \chi(d)\right)$ gibt es, wenn $\chi(-1) = (-1)^k$ und $k \geqq 2$, genau zwei Eisenstein-Reihen; ihre Entwickelungen sind

$$E_1(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_1(n)\, z^n, \qquad c_1(n) = \sum_{d \mid n,\, d>0} d^{k-1} \chi\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$E_2(\tau) = A_k(q) + \sum_{n=1}^{\infty} c_2(n)\, z^n, \qquad c_2(n) = \sum_{d \mid n,\, d>0} d^{k-1} \chi(d)$$

$$A_k(q) = \gamma_k \frac{q^{k-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^k}(k-1)!\, L(k,\chi), \quad L(k,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\, n^{-k}$$

$$\gamma_k = (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}.$$

Aus den allgemeineren Reihen der Stufe N (vgl. § 1 in T_n I)

$$(24) \qquad G_k(\tau, a_1, a_2; N) = \sum_{m_i \equiv a_i\,(N)}{}' (m_1 \tau + m_2)^{-k},$$

deren Verhalten bei Substitutionen aus $\Gamma(1)$ durch die Gleichungen

$$(25) \qquad G_k(\tau, a_1, a_2; N) \left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right. = G_k(\tau, a a_1 + c a_2, b a_1 + d a_2; N)$$

gegeben ist, setzen sich die obigen Reihen folgendermassen zusammen:

$$(26) \begin{cases} 2 \cdot (-2\pi i)^k \cdot E_1(\tau) = (k-1)! \sum\limits_{t,l \bmod q} \chi(t) \cdot G_k(\tau, t, l; q) \\ 2 \cdot (2\pi)^k \cdot E_2(\tau) = \gamma_k \cdot q^{k-\frac{1}{2}} \cdot (k-1)! \sum\limits_{t \bmod q} \chi(t) \cdot G_k(\tau, 0, t; q). \end{cases}$$

Dass es nicht mehr Eisenstein-Reihen des reellen Nebentypus gibt, folgt daraus, dass der Fundamentalbereich von

$\Gamma_0(q)$ nur zwei rationale Spitzen $\tau = 0$ und $\tau = \infty$ besitzt. Wir merken noch das Verhalten bei T an:

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} E_1 \mid T &= (-i)^k q^{\frac{1}{2}-k} \cdot \gamma_k \cdot E_2\left(\frac{\tau}{q}\right) \\ E_2 \mid T &= (-i)^k q^{-\frac{1}{2}} \cdot \gamma_k \cdot E_1\left(\frac{\tau}{q}\right) \end{aligned}\right. \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schliesslich muss noch festgestellt werden, welche irreduziblen invarianten Scharen durch diese Eisenstein-Reihen und ihre Konjugierten erzeugt werden. Es zeigt sich, dass dies nur von dem Verhalten der betr. Funktionen gegenüber dem Operator

$$(28)\qquad W = \sum_{l \bmod q} T U^l$$

abhängt, da folgender Satz gilt:

Satz 13: Für eine Funktion $F(\tau)$ eines reellen Typus von der Stufe q ist die zugehörige Darstellung $\mathfrak{D}(F)$ dann und nur dann irreduzibel, wenn $F(\tau)$ Eigenfunktion des Operators W ist, d. h. wenn eine Gleichung gilt

$$F \mid W = \lambda \cdot F.$$

Die Darstellung $\mathfrak{D}(F)$ ist durch die Konstante λ völlig bestimmt und zwar

$$\mathfrak{D}(F) = \mathfrak{E}, \text{ wenn } \lambda = q$$

$$\mathfrak{D}(F) = \mathfrak{G}_q, \text{ wenn } \lambda = -1$$

$$\mathfrak{D}(F) = \mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}} \text{ oder } \mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}, \text{ wenn } \lambda^2 = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q.$$

Beweis: Wenn $F(\tau)$ von reellem (oder auch komplexem) Typus ist, gibt es unter ihren Konjugierten höchstens $q+1$ linear unabhängige. Denn bei $\bar{\Gamma}(1)$ erfahren die $(q+1)$ Funktionen

$$(29)\qquad F,\quad F\,|\,TU^l,\quad (l \bmod q)$$

bis auf konstante Faktoren nur eine Permutation. Dieses Verhalten findet nämlich offenbar bei U statt, aber auch bei T wegen

$$(30)\qquad TU^lT = R_l U^{-l}\, TU^{-l^{-1}} \quad (l \not\equiv 0 \bmod q).$$

Hieraus folgt, dass die einzigen bei U invarianten Funktionen der aus (29) erzeugten Schar die beiden

$$(31)\qquad F \text{ und } F\,|\,W$$

sind. Sie haben konjugiert-komplexen Typus, denn es ist

$$W \cdot R_n = R_n^{-1} \cdot W,$$

weil

$$(32)\qquad TR_n = R_n^{-1}T, \quad U^lR_n = R_nU^{ln^2}$$

Ist nun der Typus reell, so kommen als irreduzible Darstellungen nach Satz 4 nur die vier dort erwähnten in Betracht, und jede enthält nur je eine einzige Funktion des betr. Typus. Folglich ist die notwendige und hinreichende Bedingung, damit $\mathfrak{D}(F)$ irreduzibel ist, dass (31) nur eine einzige Funktion darstellt, d. h. dass

$$(33)\qquad F\,|\,W = \lambda \cdot F.$$

Nun genügt aber bei Funktionen eines Typus $(-k, q, \varepsilon(d))$ der Operator W einer quadratischen Gleichung. Nämlich

$$(34)\quad \begin{cases} W^2 = \sum\limits_{l,\, n \bmod q}{}' TU^lTU^n = \sum\limits_{n}{}' T^2U^n + \sum\limits_{l \neq 0;\, n}{}' R_l U^{-l}\, TU^{-l^{-1}+n} = \\ \qquad = (-1)^k q + W \sum\limits_{l}{}' \varepsilon(l). \end{cases}$$

Beim Haupttypus ist also $W^2 = q + (q-1)\,W$, beim Nebentypus $W^2 = (-1)^k q$. Also ist beim Haupttypus nach (33) $\lambda = q$ oder -1, beim reellen Nebentypus $\lambda^2 = (-1)^k q = (-1)^{\frac{q-1}{2}} q$. Damit ist Satz 13 bewiesen.

Im Falle des reellen Nebentypus gibt das Vorzeichen von λ noch die Entscheidung, welche der beiden Darstellungen des Grades $\frac{q+1}{2}$ die $\mathfrak{D}(F)$ ist. Diese beiden Darstellungen lassen sich nämlich unterscheiden durch die Eigenwerte, welche bei dem Operator U möglich sind. Setzt sich F mit seinen Konjugierten nach einer solchen irreduziblen Darstellung um, so sind in der linearen Schar als Lösungen φ von

$$(35) \qquad \varphi \,|\, U = \zeta^a \varphi \quad \left(\zeta = e^{\frac{2\pi i}{q}}, \quad a \not\equiv 0\,(q)\right)$$

in der einen Darstellung $\mathfrak{S}_{\frac{q+1}{2}}$ nur solche mit $\chi(a) = +1$, in der anderen $\mathfrak{S}'_{\frac{q+1}{2}}$ nur solche mit $\chi(a) = -1$ vorhanden. Entsprechend heisse $\mathfrak{S}_{\frac{q+1}{2}}$ zugeordnet den Resten, und $\mathfrak{S}'_{\frac{q+1}{2}}$ zugeordnet den Nichtresten. Die Lösungen von (35) sind

$$(36) \qquad \varphi = \varphi_a = F \,\Big|\, \sum_{l \bmod q} T U^l \zeta^{-la}.$$

Wenn nun $F \,|\, W = \lambda F$, so folgt aus (30) leicht

$$\varphi_a \,|\, W = F(-1)^k \left(q + \lambda \chi(a)\, G_\chi\right).$$

Dabei ist G_χ die Gauss'sche Summe

$$(37) \qquad G_\chi = \sum_{l \bmod q} \chi(l)\, \zeta^l = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{wenn } q \equiv 1\,(4) \\ i\sqrt{q}, & \text{wenn } q \equiv 3\,(4). \end{cases}$$

Es verschwinden nun entweder alle φ_a mit $a =$ Rest oder alle mit $a =$ Nichtrest. Daraus ergibt sich

Satz 14: Ist F von reellem Nebentypus und $\mathfrak{D}(F)$ irreduzibel, gilt also (33), so ist

$$\mathfrak{D}(F) = \mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}, \text{ wenn } \lambda = (-1)^k G_\chi,$$

$$\mathfrak{D}(F) = \mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}, \text{ wenn } \lambda = -(-1)^k G_\chi.$$

Die Anwendung dieser Überlegungen auf die Eisenstein-Reihen ergibt zunächst

Satz 15: Verhalten der Reihen des Haupttypus bei dem Operator W:

$$G_k(\tau) \mid W = q\, G_k(\tau)$$

$$G_k(q\tau) \mid W = q^{-k} \sum_{l \bmod q} G_k\left(\frac{\tau + l}{q}\right) = q^{1-k}\left(\rho_k + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(nq)\, z^n\right) =$$
$$= \left(1 + q^{1-k}\right) G_k(\tau) - G_k(q\tau)$$

$$E_q(\tau) \mid W = -E_q(\tau).$$

Zur irreduziblen $\mathfrak{G}_q$ gehört also ausser $E_q(\tau)$

$$\left(1 + q^{1-k}\right) G_k(\tau) - (1+q)\, G_k(q\tau) \qquad (\text{wenn } k > 2).$$

Satz 16: Verhalten der Reihen des Nebentypus bei dem Operator W:

$$q^{k-1}\, E_1(\tau) \mid W = (-i)^k \sqrt{q}\, \gamma_k E_2(\tau)$$
$$E_2(\tau) \mid W = (-i)^k \sqrt{q}\, \gamma_k q^{k-1}\, E_1(\tau).$$

Die Eigenfunktionen des Operators W folgen aus

$$(38)\begin{cases} \left(q^{k-1} E_1(\tau) \pm E_2(\tau)\right) \middle| W \\ = \pm(-i)^k \gamma_k \sqrt{q}\left(q^{k-1} E_1(\tau) \pm E_2(\tau)\right). \end{cases}$$

Die Funktionen mit dem oberen Zeichen definieren also nach Satz 14 die irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$, welche den Resten zugeordnet ist.

Zur numerischen Aufstellung der Reihen ist schliesslich noch die Berechnung der Werte der Zetafunktion $\zeta(s)$ und der Reihen $L(s, \chi)$ in gewissen ganzzahligen Punkten $s = k$ erforderlich. Die ersten Werte von $\zeta(s)$ führen zu

$$(39)\begin{cases} \rho_2 = -\frac{1}{24}, \quad \rho_4 = \frac{1}{240}, \quad \rho_6 = -\frac{1}{504}, \quad \rho_8 = \frac{1}{480}, \\ \rho_{10} = -\frac{1}{264}, \quad \rho_{12} = \frac{691}{65520}, \quad \rho_{14} = -\frac{1}{24}. \end{cases}$$

Die Berechnung der $L(k, \chi)$ ist, da sie noch von dem Parameter q abhängen, mühsamer. Durch den Ansatz

$$(40)\begin{cases} \chi(l) = \frac{1}{G_\chi} \sum_{l \bmod q} \chi(l) \zeta^{ln}; \quad G_\chi L(k, \chi) = \\ \sum_{l \bmod q} \chi(l) \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^{ln} \cdot n^{-k} = \frac{1}{2} \sum_{l \bmod q} \chi(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{ln} + (-1)^k \zeta^{-ln}}{n^k} \end{cases}$$

wird man zunächst auf die Bernoulli'schen Polynome $g_k(x)$ geführt, die mit reellem Argument x im Intervall $0 < x < 1$ definiert sind durch

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \frac{-1}{(2\pi i)^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n x} + (-1)^k e^{-2\pi i n x}}{n^k} \\ &= \frac{x^k}{k!} - \frac{1}{2} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + B_1 \frac{x^{k-2}}{(k-2)! \cdot 2!} - B_2 \frac{x^{k-4}}{(k-4)! \cdot 4!} \pm \cdots \\ &= \frac{x^k}{k!} - \frac{1}{2} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} - 4 \sum_{1 \leq r \leq \frac{k}{2}} \frac{r \rho_{2r} x^{k-2r}}{(k-2r)!(2r)!}, \text{ wenn } k \geq 1. \end{aligned}$$

Die ersten Polynome sind

$$(41)\quad\begin{cases} g_1(x) = x - \frac{1}{2} \\ g_2(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \\ g_3(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right) \\ g_4(x) = \frac{1}{12}\left(\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{60}\right). \end{cases}$$

Es gilt bekanntlich (mit $g_0(x) = 1$)

$$(42)\quad\begin{cases} g_k(1-x) = (-1)^k \cdot g_k(x) \\ g'_k(x) = g_{k-1}(x);\ g_k(x+1) - g_k(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}. \end{cases}$$

Für die L-Reihe erhalten wir also (wobei stets $\chi(-1) = (-1)^k$ vorausgesetzt ist)

$$G_\chi L(k,\chi) = -\frac{1}{2}(2\pi i)^k \sum_{l=1}^{q-1} \chi(l)\, g_k\left(\frac{l}{q}\right)$$

und damit für das konstante Glied in $E_2(\tau)$ nach (40)

$$(43)\quad\begin{cases} q^{k-\frac{1}{2}}\gamma_k \frac{(k-1)!}{(2\pi)^k} L(k,\chi) \\ = A_k(q) = -\frac{(k-1)!}{2} q^{k-1} \sum_{l=1}^{q-1} \chi(l)\, g_k\left(\frac{l}{q}\right). \end{cases}$$

Das Vorzeichen von A_k ist offenbar $\gamma_k = (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}$.

Für die numerische Rechnung formen wir weiter den Ausdruck für A_k so um, dass die Anzahl der Summanden auf den vierten Teil herabgedrückt wird und überdies an Stelle des Polynoms g_k ein solches vom Grade $\leqq k-1$ auftritt. Dies geschieht allgemein durch Benutzung folgender elementarer Identitäten: Für jede ungrade Zahl $q > 1$ ist für jede Funktion F

$$\sum_{l=1}^{q-1}{}' F(l) = \sum_{l=1}^{\frac{q-1}{2}}{}' \big(F(l) + F(q-l)\big) = \sum_{l=1}^{\frac{q-1}{2}}{}' \big(F(2l) + F(q-2l)\big)$$

und ebenso auch

$$(44) \qquad \sum_{l=1}^{\frac{q-1}{2}}{}' F(l) = \sum_{l=1}^{\frac{q-1}{4}}{}' F(2l) + \sum_{\frac{q+1}{4} \leqq v \leqq \frac{q-1}{2}}{}' F(q-2v).$$

Durch Anwendung der ersten Identität erhält man mit Rücksicht auf (42)

$$\sum_{l=1}^{q-1}{}' \chi(l)\, g_k\Big(\frac{l}{q}\Big) = 2 \sum_{l=1}^{\frac{q-1}{2}}{}' \chi(l)\, g_k\Big(\frac{l}{q}\Big) = 2\chi(2) \sum_{l=1}^{\frac{q-1}{2}}{}' \chi(l)\, g_k\Big(\frac{2l}{q}\Big),$$

also ist der erste dieser Ausdrücke auch gleich einer Linearkombination der beiden letzten mit der Koeffizientensumme 1:

$$(45) \qquad \sum_{l=1}^{q-1}{}' \chi(l)\, g_k\Big(\frac{l}{q}\Big) = \frac{2\chi(2)}{2^k\chi(2) - 1} \cdot \sum_{l=1}^{\frac{q-1}{2}}{}' \chi(l) \Big\{2^k g_k\Big(\frac{l}{q}\Big) - g_k\Big(\frac{2l}{q}\Big)\Big\}.$$

Hier ist jetzt der Faktor von $\chi(l)$ in der Summe ein Polynom in l vom Grade $k-1$. Zur weiteren Umformung betrachten wir die Teilsummen $\sum \chi(l)\, l^r$ über die Intervalle $l = 1, \ldots . \frac{q \pm 1}{4}$ und $l = 1, \ldots, \frac{q-1}{2}$. Wir setzen

$$S_r = \sum_{1 \leqq l \leqq \frac{q-1}{4}}{}' \chi(l)\, l^r; \quad C_r = \sum_{1 \leqq l \leqq \frac{q-1}{2}}{}' \chi(l)\, l^r.$$

Nach (44) ist

$$C_r = 2^r \chi(2) S_r + \sum_{\frac{q+1}{4} \leqq v \leqq \frac{q-1}{2}} \chi(q-2v) \cdot (q-2v)^r$$

und hieraus entstehen Rekursionsformeln zwischen den C_r, S_r:

$$(46)\left\{\begin{aligned} & C_r\left(\chi(2)-\chi(-1)(-2)^r\right) \\ & = 2^r S_r + \chi(-1) \sum_{1 \leqq l \leqq \frac{q-1}{2}} \chi(l)\left((q-2l)^r - (-2l)^r\right) \\ & \quad -\chi(1) \sum_{1 \leqq l \leqq \frac{q-1}{4}} \chi(l)(q-2l)^r . \end{aligned}\right.$$

Dazu tritt noch die Gleichung

$$0 = \sum_{l=1}^{q-1} \chi(l) = C_0 + \chi(-1) C_0 ,$$

woraus folgt

$$C_0 = 0, \text{ wenn } \chi(-1) = +1 .$$

Wir setzen wieder

$$\chi(2) = \varepsilon_2, \quad \chi(-1) = \varepsilon$$

und trennen jetzt die beiden Fälle $\varepsilon = \pm 1$.

a) Sei $\varepsilon = +1$, also k grade, $C_0 = 0$.

Aus (46) folgt für $r = 1, 2, 3$

$$C_1 = \frac{4 S_1 - q S_0}{2 + \varepsilon_2}$$

$$C_2 = \frac{7 - 2\varepsilon_2}{15} q C_1$$

$$(8 + \varepsilon_2) C_3 = 16 S_3 - 12 q S_2 + \frac{26 - \varepsilon_2}{10} q^2 C_1 + \frac{q^3}{2} S_0$$

$$A_2(q) = \frac{4S_1 - qS_0}{7+2\varepsilon_2} = \frac{1}{7+2\varepsilon_2}\sum_{l=1}^{\frac{q-1}{4}} \chi(l)(4l-q)$$

$$A_4(q) = \frac{4C_3 - 3qC_2}{16-\varepsilon_2}.$$

Damit ergibt sich folgende Tabelle:

q	5	13	17	29	37
$A_2(q)$	$-\frac{1}{5}$	-1	-2	-3	-5
$A_4(q)$	1	29	82	471	1129

b) Es sei $\varepsilon = -1$, also $q \equiv 3 \pmod 4$, k ungrade. Für $q = 3$ ist zunächst nach (43)

$$A_k(3) = -3^{k-1}(k-1)!\, g_k\left(\frac{1}{3}\right). \tag{47}$$

Weiter werde $q > 3$ vorausgesetzt. Dann ist bekanntlich nach Dirichlet

$$-qh = \sum_{l=1}^{q-1} \chi(l)\, l = 2C_1 - qC_0 = 4\varepsilon_2 C_1 - q\varepsilon_2 C_0$$

$$C_0 = (2-\varepsilon_2)h; \quad C_1 = \frac{1-\varepsilon_2}{2} qh.$$

Ferner wie oben nach der Rekursionsformel

$$S_0 = \frac{1+\varepsilon_2}{2} h = \frac{1+\varepsilon_2}{2} C_0$$

$$(4+\varepsilon_2)C_2 = 8S_2 - 4qS_1 + \frac{1-\varepsilon_2}{2} q^2 h$$

$$(8-\varepsilon_2)A_3(q) = 2C_2 - qC_1 = \frac{8}{4+\varepsilon_2}(2S_2 - qS_1) - \frac{1-\varepsilon_2}{2}\cdot\frac{hq^2}{3}$$

$$(8-\varepsilon_2)(4+\varepsilon_2)\,C_3 = 6q(4-\varepsilon_2)(2S_2-qS_1)+3\,\frac{1-\varepsilon_2}{2}\,q^3 h$$

$$(32-\varepsilon_2)\,A_5(q) = 8C_4-8C_3 q+q^3 C_1 .$$

q	3	7	11	19	23	31	43	47
$A_3(q)$......	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{8}{7}$	-3	-11	-24	-48	-83	-144
$A_5(q)$......	$\frac{1}{3}$	16	$\frac{3\cdot 5^2\cdot 17}{11}$	1345	3408			

§ 3. Das Verhalten der Modulfunktionen bei Transformationen höherer Ordnung.

Zwischen der Theorie der elliptischen Modulfunktionen und der Arithmetik der Primzahlen besteht nun ein Zusammenhang, welcher durch die von mir eingeführten Operatoren T_n und T_m^t vermittelt wird. Ich gebe hier zuerst einen kurzen Überblick über die Haupttatsachen und verweise bezgl. der Einzelheiten auf die genannten Arbeiten.

Zu den Modulformen der Stufe N, Dimension $-k$, vom Charakter $\varepsilon(n)$ und vom Teiler t wird für jede natürliche Zahl m ein Operator T_m^t definiert.

$$T^t(m) \equiv T_m^t = m^{k-1}\sum_{a,b,d} R_a\cdot\begin{pmatrix} a & bt_1 \\ 0 & d\end{pmatrix} \qquad \left(t_1=\frac{N}{t}\right).$$

Hier durchläuft mit $ad = m$ die Zahl a alle positiven zu N primen Teiler von m und b bei festem a ein volles Restsystem mod d. Für eine solche Funktion $F(\tau)$ ist also

$$F\,\big|\,T_m^t = m^{k-1}\sum_{a,b,d}\varepsilon(a)\,F\left(\frac{a\tau+bt_1}{d}\right)\cdot d^{-k}$$

($\varepsilon(a)$, als Charakter mod N aufgefasst, ist Null, wenn $(a,N)>1$).

Speziell wird

$$F \mid T^t_m = 0, \text{ wenn } \left(m, \frac{N}{t}\right) > 1.$$

Für jedes m ist $F \mid T^t_m$ wieder eine Funktion von derselben Stufe, Dimension, Charakter und Teiler. Die Operatoren mit demselben t können also hintereinander ausgeführt, d. h. komponiert werden, und dabei zeigt sich dann die Kompositionsregel

$$(48) \qquad T^t_{m_1} \cdot T^t_{m_2} = \sum_{d \mid m_1, m_2} T^t\left(\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}\right) \cdot \varepsilon(d) \cdot d^{k-1}$$

(d durchläuft die positiven gemeinsamen Teiler von m_1, m_2). Sie sind also mit einander vertauschbar. Bei Operatoren einer Ordnung n mit $(n, N) = 1$ ist übrigens $T^t_n = T_n$ von t ganz unabhängig.

Eine lineare Schar von Modulformen mit demselben N, k, t, ε heisse **abgeschlossen**, wenn sie durch alle T^t_m als Ganzes in sich übergeht. Es sei $F^\rho = \sum_{m=0}^{\infty} a^\rho(m) z_N^{mt}$ ($\rho = 1, \ldots . \kappa$) die Basis einer abgeschlossenen Schar, so gibt es also zu jedem m eine konstante Matrix $\lambda(m) = $ $= (\lambda_{\rho\sigma}(m))$ des Grades κ mit

$$(49) \qquad F^\rho \mid T^t_m = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \lambda_{\rho\sigma}(m) F^\sigma.$$

Hier ist $\lambda(m) = 0$, wenn $\left(m, \frac{N}{t}\right) > 1$. Nach (48) ist daher auch

$$(48\text{a}) \qquad \lambda(m_1) \cdot \lambda(m_2) = \sum_{d \mid m_1, m_2} \lambda\left(\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}\right) \varepsilon(d)\, d^{k-1}.$$

Bei passender Definition der Matrix $\lambda(0)$ (die nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn $t = N$) sind die κ^2 Funktionen

$$(49\text{a})\qquad f_{\rho\sigma}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{\rho\sigma}(m) z_N^{mt} \quad (\rho, \sigma = 1, \ldots \kappa)$$

linear äquivalent mit der Schar der F^{ρ}. Es gibt also κ linear unabhängige konstante Matrizen B^{ν} des Grades κ, sodass die Matrix

$$(50)\qquad \mathsf{B}(\tau) = \big(f_{\rho\sigma}(\tau)\big) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda(m)\, z_N^{mt} = \sum_{\nu=1}^{\kappa} F^{\nu}(\tau)\cdot \mathsf{B}^{\nu}.$$

Die Matrizen B^{ν} sind mit einander vertauschbar und bilden die Basis eines kommutativen Ringes von Matrizen, welcher identisch ist mit dem durch die $\lambda(m)$ erzeugten Ringe. Dieser Ring ist ferner **maximal**, d. h. jede Matrix des Grades κ mit komplexen Zahlen als Elementen, die mit allen B^{ν} vertauschbar ist, ist bereits in dem Ring enthalten. Die Multiplikationsregel (48a) veranlasst zur Einführung der Dirichlet-Reihen

$$\varphi_{\rho\sigma}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{\rho\sigma}(m)\, m^{-s}, \quad \varphi_{\nu}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a^{\nu}(m)\, m^{-s}.$$

Den Faktor t^{-s} lasse ich hier bei Seite (anders als in T_n II !), da wir in dieser Arbeit nur mit den Fällen $t = 1$ und $t = N$ zu tun haben werden. Die Matrix $\Phi(s) = \big(\varphi_{\rho\sigma}(s)\big)$ aus Dirichlet-Reihen, welche der Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ korrespondiert, hat endlich wegen der Produkt-Regel (48a) die Entwickelung

$$(51)\qquad \Phi(s) = \prod_p \big(\mathsf{E} - \lambda(p)\, p^{-s} + \varepsilon(p)\, p^{k-1-2s}\,\mathsf{E}\big)^{-1}$$

E ist die Einheitsmatrix des Grades $\varkappa$, wofür wir auch 1 schreiben. Bei den Primzahlen p, welche in der Stufe N aufgehen, ist die Klammer in dem Produkt (51) höchstens vom Grade 1 in p^{-s}, und ferner $= 1$, wenn p überdies in $\frac{N}{t}$ aufgeht. Zur einfachen Bezeichnung solcher Euler-Produkte werde fortan eine Dirichlet-Reihe $\varphi(s)$ ein **kanonisches Euler-Produkt** zu k, N, t, ε genannt, wenn

(52) 1) $\varphi(s)$ die Dirichlet-Reihe einer Modulform mit diesen k, N, t, ε ist,

2) eine Entwickelung gilt

$$\varphi(s) = \prod_p \left(1 - a_p p^{-s} + \varepsilon(p)\, p^{k-1-2s}\right)^{-1}$$

$$\left(a_p = 0,\ \text{wenn}\ p \,\Big|\, \frac{N}{t}\ \text{und}\ p \,|\, t\right).$$

Diese Benennung gebrauchen wir auch entsprechend bei Dirichlet-Reihen, deren Koeffizienten kommutative Matrizen sind. Bemerkenswert ist folgendes: Wenn eine Dirichlet-Reihe zu einer Modulfunktion mit $t = 1$ gehört und wenn sie überhaupt ein Euler-Produkt ist, so ist sie ein kanonisches Euler-Produkt[1].

Geht man von der Basis F^{ρ} der obigen linearen Schar durch eine lineare Substitution mit der Matrix A zu der Basis $\mathsf{A}(F)$ über, so gehen $\mathsf{B}(\tau), \Phi(s)$ resp. in die äquivalenten Matrizen

$$\mathsf{A} \cdot \mathsf{B}(\tau) \cdot \mathsf{A}^{-1}, \quad \mathsf{A} \cdot \Phi(s) \cdot \mathsf{A}^{-1}$$

über. Die charakteristischen Wurzeln der Matrix B gehören ebenfalls der Schar der F^{ρ} an und sind identisch mit denjenigen Individuen der Schar, deren Dirichlet-Reihe ein

[1] T_n II, Satz 42.

kanonisches Euler-Produkt ist, ebenso auch, abgesehen von konstanten Faktoren, identisch mit denjenigen $F(\tau)$ der Schar, welche **Eigenfunktionen** aller Operatoren T_m^t sind, d. h. den Gleichungen

$$F \,|\, T_m^t = \omega_m F, \quad m = 1, 2, \ldots$$

mit konstanten ω_m genügen. Die ω_m sind dann grade die Entwickelungskoefficienten jener charakteristischen Wurzeln. Jede Eigenfunktion ist also für sich ein abgeschlossenes System. Weitere abgeschlossene Systeme sind

alle Modulformen
alle Eisenstein-Reihen
alle Spitzenformen

mit demselben k, N, t, ε. Sind die charakteristischen Wurzeln von $\mathsf{B}(\tau)$ alle verschieden, so sind sie linear unabhängig, und $\mathsf{B}(\tau)$ ist einer Diagonalmatrix äquivalent und umgekehrt. Bezüglich der Frage nach der simultanen Reduktion der Matrizen $\lambda(m)$ auf Diagonalgestalt hat nun Herr Petersson[1] folgenden Fundamentalsatz bewiesen:

Satz 17: Bei jeder abgeschlossenen Schar von Modulformen sind die Matrizen $\lambda(n)$ mit $(n, N) = 1$ simultan auf Diagonalform transformierbar. Ihre charakteristischen Wurzeln ω_n haben bei Spitzenformen die Eigenschaft:

$$\omega_n \sqrt{\varepsilon(n)^{-1}} \text{ ist reell.}$$

Bei jeder abgeschlossenen Schar vom Teiler $t = 1$ ist daher die Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ einer Diagonalmatrix äquivalent. Und hieraus folgt

[1] H. Petersson, Konstruktion der sämtlichen Lösungen einer Riemannschen Funktionalgleichung durch Dirichlet-Reihen mit Eulerscher Produktentwickelung. I, II, III. Math. Ann. 116 (1939) und 117 (1940), zitiert als K I, K II, K III.

Satz 18: Die Dirichlet-Reihe jeder normierten Funktion vom Teiler 1 ist eindeutig als lineare Kombination von kanonischen Euler-Produkten derstellbar.

Für andere Teiler t ist im allgemeinen ein solcher Satz nicht mehr richtig. Man muss dann die Bedingung »kanonisch« bei den Summanden fallen lassen.

Das besonders einfache Verhalten der Funktionen vom Teiler 1 gibt den Anlass, jeder Reihe vom Teiler t eine Reihe vom Teiler 1 zuzuordnen:

Unter der **reduzierten Reihe** zu einer Reihe $F(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a(m) z^m$ bezw. $\varphi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} a(m) m^{-s}$ verstehen wir diejenige Potenzreihe bezw. Dirichlet-Reihe

$$\tilde{F}(\tau) = \sum_{(m,N)=1} a(m) z_N^m \quad \text{bezw.} \quad \tilde{\varphi}(s) = \sum_{(m,N)=1} a(m) m^{-s},$$

welche aus der ursprünglichen Reihe durch Streichung aller Glieder $a(m)$ mit $(m, N) > 1$ hervorgeht, unter gleichzeitiger Ersetzung von z durch z_N bei der Potenzreihe.

Satz 19: Die reduzierte Reihe $\tilde{F}(\tau)$ zu $F(\tau)$ ist wieder eine Modulform von derselben Dimension, Stufe und Charakter wie $F(\tau)$, aber vom Teiler 1.

Beweis. Wir zeigen gleich noch etwas mehr, was für den Beweis des Satzes 22 nachher erforderlich ist, aber sonst später nicht mehr gebraucht wird. Es sei M ein positiver Teiler von N. Aus der Reihe $F(\tau)$ leiten wir die Reihe

$$F(\tau, M) = \sum_{(m,M)=1} a(m) z_M^m$$

ab und zeigen, dass auch sie dieselbe Dimension, Stufe und Charakter wie $F(\tau)$ hat, aber vom Teiler $\frac{N}{M}$ ist. Der Operator

$$S_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

führt nämlich die Funktion $F(\tau)$ wieder in eine Form der Stufe N über, wie sich aus

$$S_M \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} S_M^{-1} = \begin{pmatrix} a & bM^{-1} \\ Mc & d \end{pmatrix}$$

ergibt. Überdies ist offenbar

$$F \,|\, S_M \cdot U^M = F \,|\, S_M .$$

Daher ist mit beliebigen Konstanten x_l und $\zeta_M = e^{\frac{2\pi i}{M}}$ auch

$$(54)\quad \left\{ \begin{aligned} F \,|\, L_M &= M^k \sum_{l \bmod M} x_l F \,|\, S_M U^l = \sum_{l \bmod M} x_l F\left(\frac{\tau + l}{M}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} z_M^m \, a(m) \sum_{l \bmod M} x_l \cdot \zeta_M^{lm} \end{aligned} \right.$$

eine Funktion der Stufe N. Wir wählen x_l so, dass

$$\sum_{l \bmod M} x_l \zeta_M^{lm} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (m, M) = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

was offenbar eindeutig möglich ist. Hieraus folgt

$$(55)\qquad x_{n \cdot l} = x_l, \text{ wenn } (n, M) = 1 .$$

Mit diesen x_l ist dann (54) genau die Reihe $F(\tau, M)$; sie hat den Teiler $\frac{N}{M}$. Ihr Verhalten bei $R_n = \begin{bmatrix} n^{-1} & 0 \\ 0 & n \end{bmatrix}$ folgt aus

$$U^l R_n = R_n U^{ln^2}; \quad S_M R_n S_M^{-1} = \begin{bmatrix} n^{-1} & * \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

$$\sum_l x_l S_M U^l R_n = \sum_l x_l S_M R_n U^{ln^2} = \varepsilon(n) \sum_l x_l S_M U^l$$

also

$$(55\text{a}) \qquad F(\tau, M) \,|\, R_n = \varepsilon(n) \cdot F(\tau, M).$$

Mit $M = N$ ist dann unser Satz 19 bewiesen.

Ist speziell F eine Eisenstein-Reihe, so ist nach (54) auch $\tilde{F}$ eine solche, und deren Dirichlet-Reihe ist nach T_n II, Satz 44, 45 eindeutig in die Gestalt

$$\sum_{\chi_1, \chi_2} C(\chi_1, \chi_2) \cdot L(s-k+1, \chi_1) \cdot L(s, \chi_2)$$

zu setzen, wo die C Konstante und die χ_1, χ_2 gewisse Restcharaktere mod N sind.

Wenn die Funktionen $F^{\rho}(\tau)$ vom Typus $\bigl(-k, N, \varepsilon(n)\bigr)$ eine Schar vom Range κ erzeugen, so hat die Schar der $F^{\rho}(\tau, M)$ einen Rang $\kappa(M) \leqq \kappa$; speziell ist auch stets der Rang $\tilde{\kappa}$ der Schar der reduzierten Reihen $\tilde{\kappa} \leqq \kappa$.

Satz 20: Wenn in den obigen Bezeichnungen bei einer abgeschlossenen Schar $\tilde{\kappa} = \kappa$ ist, so ist die Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ zur Schar der $F^{\rho}(\tau)$ auf Diagonalform transformierbar, und jedes Element der Schar kann also als lineare Kombination der charakteristischen Wurzeln dieser Matrix dargestellt werden.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass der Operator

$$L_N = N^k \sum_{l \bmod N} x_l \cdot S_N \cdot U^l$$

der nach (54) die Reihe $F(\tau)$ in ihre reduzierte überführt, mit allen T_n, wo $(n, N) = 1$, vertauschbar ist. Das folgt sogleich aus

$$S_N \cdot T_n = T_n \cdot S_N \text{ (Hilfssatz 3 in } T_n \text{ II, § 7)}$$

$$U^l \cdot T_n = T_n \cdot U^{ln} \text{ (Satz 33 in } T_n \text{ II, § 5)}$$

und der Gl. (55). Besteht daher

$$F^{\rho} \mid T_n = \sum_{\sigma} \lambda_{\rho\sigma}(n) F^{\sigma}$$

so gilt auch

$$\tilde{F}^{\rho} \mid T_n = \sum_{\sigma} \lambda_{\rho\sigma}(n) \tilde{F}^{\sigma}$$

(was auch direkt an den Potenzreihen festgestellt werden kann). Ist daher $\tilde{\kappa} = \kappa$, sind also die $\tilde{F}^{\rho}(\tau)$ ebenfalls linear unabhängig, so sind die Matrizen $\tilde{\lambda}(n)$, definiert durch T_n zu den $\tilde{F}^{\rho}(\tau)$, die gleichen wie die $\lambda(n)$ zu den $F^{\rho}(\tau)$. Nach dem Fundamentalsatz von Herrn Petersson ist nun die Matrix $\tilde{\mathrm{B}}(\tau)$ der reduzierten Reihen in jedem Fall einer Diagonalmatrix äquivalent, und der Ring der $\tilde{\lambda}(n)$ ist überdies maximal. Wegen $\tilde{\kappa} = \kappa$ haben die $\lambda(m)$ aus $\mathrm{B}(\tau)$ denselben Grad $\tilde{\kappa}$ und für $(n, N) = 1$ ist ausserdem $\lambda(n) = \tilde{\lambda}(n)$. Da nun die $\lambda(m)$ mit den $\lambda(n)$ vertauschbar sind, so liegen die $\lambda(m)$ bereits sämtlich in dem Ring der $\lambda(n)$ und sind daher ebenfalls auf Diagonalform reduzierbar.

Daraus folgt weiter

Satz 21: Ist $\tilde{\kappa} = \kappa$ in den Bezeichnungen von Satz 20, so ist jede Funktion der Schar, welche Eigenfunktion nur der T_n mit $(n, N) = 1$ ist, auch Eigenfunktion aller T_m^N.

Denn die charakteristischen Wurzeln von $\mathrm{B}(\tau)$ sind durch ihre reduzierte Reihe, d. h. durch ihre Eigenwerte bei den T_n mit $(n, N) = 1$, bereits eindeutig bestimmt.

Satz 22: Bei einer linearen Schar von Modulformen des Typus $\left(-k, N, \varepsilon(n)\right)$ vom Range κ ist sicher dann $\tilde{\kappa} = \kappa$, wenn der Charakter $\varepsilon(n)$ ein eigentlicher Charakter mod N ist.

Beweis. Es sei $N = q_1^{r_1} \ldots q_s^{r_s}$, wo die q_i die verschiedenen Primfaktoren von N sind. $F^{\rho}(\tau)$, $(\rho = 1, 2, \ldots \kappa)$ seien die κ Erzeugenden der gegebenen Schar. Wir setzen

$$M_0 = 1, \quad M_{i+1} = M_i \cdot q_{i+1}^{r_{i+1}} \quad (i = 0, 1, \ldots s-1)$$

und bilden für jedes $i = 0, 1, \ldots, s$ die aus den Funktionen $F^{\rho}(\tau, M_i)$ erzeugte Schar, welche bei dem Beweis von Satz 19 definiert wurden. Für den Rang κ_i dieser Schar gilt offenbar

$$\kappa_0 = \kappa \geqq \kappa_1 \geqq \kappa_2 \geqq \ldots\ldots \kappa_{s-1} \geqq \kappa_s = \tilde{\kappa}.$$

Wäre nun Satz 22 falsch, also $\kappa > \tilde{\kappa}$, so müsste in jener Kette von Ungleichungen mindestens einmal das Zeichen $>$ gelten; es sei etwa

$$\kappa_i > \kappa_{i+1}.$$

In der Schar der $F^{\rho}(\tau, M_i)$ gäbe es dann eine nicht-identisch verschwindende Funktion

$$G(\tau) = F(\tau, M_i) \not\equiv 0, \quad \text{aber } F(\tau, M_{i+1}) \equiv 0.$$

Der Kürze halber sei

$$M_i = M, \quad q_{i+1} = q$$

gesetzt, dann muss also sein

$$G\left(\tau + \frac{M}{q}\right) = G(\tau), \tag{56}$$

während überdies nach (55 a)

$$G \,|\, R_n = \varepsilon(n)\, G.$$

Hieraus folgt aber, dass $\varepsilon(n)$ bereits ein Charakter mod $\frac{N}{q}$, also kein eigentlicher Charakter mod N ist. Um das einzusehen, bedenken wir, dass nach (56) für alle ganzen x, y auch

$$(56\,\mathrm{a})\qquad G\left|\begin{pmatrix}1 & xMq^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ N & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & yMq^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right. = G$$

ist. Das Produkt dieser drei Operatoren

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix}1 + xMNq^{-1}, & (1 + yMNq^{-1})\,xMq^{-1} + yMq^{-1}\\ N & , \quad 1 + yMNq^{-1}\end{pmatrix}$$

soll nun durch passende Wahl von x, y eine ganzzahlige Matrix werden, wo das Element rechts oben eine durch N teilbare ganze Zahl ist, d. h.

$$(1 + yMNq^{-1})\,x + y \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\,\frac{Nq}{M}\right).$$

Hieraus kann x bestimmt werden, wenn nur

$$(56\,\mathrm{b})\qquad (1 + yMNq^{-1}, N) = 1\,.$$

Dann aber ist A eine Modulsubstitution mit

$$\mathsf{A} \equiv R_l\,(\mathrm{mod}\,N),\ \text{wo}\ l \equiv 1 + yMNq^{-1}\,(\mathrm{mod}\,N)$$

und daher

$$G\,|\,\mathsf{A} = \varepsilon(l)\cdot G;\quad \text{also nach (56 a)}\ \varepsilon(1 + yMNq^{-1}) = 1$$

für jedes y mit der Bedingung (56 b). Das bedeutet aber

$$\varepsilon(l) = 1,\ \text{wenn}\ l \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,Nq^{-1})\ \text{und}\ (l, N) = 1,$$

also wäre $\varepsilon(n)$ bereits ein Charakter mod $\frac{N}{q}$, gegen die Voraussetzung. Damit ist Satz 22 bewiesen.

Aus den Sätzen 18, 20, 22 folgen sofort als Hauptergebnisse der allgemeinen Theorie

Satz 23: Die reduzierte Dirichlet-Reihe einer jeden Modulform eines beliebigen Typus ist als lineare Kombination der eindeutig bestimmten reduzierten kanonischen Euler-Produkte zu diesem Typus darstellbar.

Satz 24: Auch die vollständige Dirichlet-Reihe jeder Modulform eines Typus $\bigl(-k, N, \varepsilon(d)\bigr)$ ist, falls $\varepsilon(n)$ ein eigentlicher Charakter mod N ist, als lineare Kombination der eindeutig bestimmten kanonischen Euler-Produkte zu diesem Typus darstellbar.

Bei allen diesen Funktionen ist der Operator T_N^N eng verknüpft mit dem Operator

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}, \quad H^2 = (-1)^k \cdot N^{-k}.$$

Zunächst gilt

Satz 25: Durch H geht jede Funktion des Typus $\bigl(-k, N, \varepsilon(d)\bigr)$ in eine Funktion des konjugiert-komplexen Typus über.

Das folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$(57) \qquad H \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot H^{-1} = \begin{pmatrix} d & -cN^{-1} \\ -bN & a \end{pmatrix}.$$

Der Operator T_N^N kann dann auch so geschrieben werden:

$$(58) \qquad \left\{ \begin{aligned} T_N^N &= N^{k-1} \sum_{l \bmod N} \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & N \end{pmatrix} = (-1)^k \cdot N^{k-1} \cdot H \cdot W \\ &\text{mit } W = \sum_{l \bmod N} T U^l. \end{aligned} \right.$$

Ist die Stufe N eine Primzahl, so ist jeder Charakter $\varepsilon(d)$, der nicht der Hauptcharakter ist, ein eigentlicher Charakter mod N. Bei einer Schar von Funktionen des Haupttypus, vom Range κ, ist in diesem Fall die Differenz

$\varkappa - \tilde{\varkappa}$ gleich der Anzahl der Funktionen erster Stufe, welche in der Schar enthalten sind, wie man leicht nach der Methode von Satz 22 zeigt. Daraus ergibt sich folgende Erweiterung von Satz 24:

Satz 24a: Bei Primzahlstufe ist die Dirichlet-Reihe jeder Spitzenform des Haupttypus mit $k < 12$ und $k = 14$, sowie jeder Form des Haupttypus mit $k = 2$ als lineare Kombination von kanonischen Euler-Produkten darstellbar.

Denn in diesen Fällen ist $\varkappa = \tilde{\varkappa}$, weil es hier keine Spitzenformen der ersten Stufe, bezw. bei $k = 2$ überhaupt keine Formen der ersten Stufe gibt.

Weiterhin sei in diesem Paragraphen die Stufe N eine ungrade Primzahl q. Hier lässt sich wegen der einfachen Eigenschaften des Operators W nach § 2 die Frage nach der Anzahl der kanonischen Produkte zum *Haupttypus* $(-k, q, 1)$ auf eine Frage über Funktionen erster Stufe zurückführen. Die Matrix $\mathsf{B}(\tau)$ zum vollen System des Haupttypus[1] ist nämlich dann und nur dann auf Diagonalform transformierbar, wenn bei den kanonischen Euler-Produkten der *ersten* Stufe und der Dimension $-k$ alle Eigenwerte λ_q des Operators T_q

$$\lambda_q^2 \neq 4\, q^{k-1} \tag{59}$$

haben. Auch die Eigenwerte des Operators T_q^q für die Funktionen des Haupttypus kann man angeben. (Siehe auch § 8).

Bei dem *Nebentypus* gibt es nun noch eine feinere Unterscheidung der kanonischen Euler-Produkte, die später arithmetisch wichtig wird. Die beiden verschiedenen irreduziblen Darstellungen $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ und $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ vom Grade $\frac{q+1}{2}$, die nach Satz 4 bei Funktionen des Nebentypus vorkom-

[1] Petersson, K II.

men können, nennen wir abkürzend »entgegengesetzt«. Nach der allgemeinen Theorie in § 12 T_n II geht eine Funktion $f(\tau)$ vom Nebentypus mit irreduziblem $\mathfrak{D}(f)$ durch die Operatoren T_n mit $(n, q) = 1$ in eine Funktion wieder mit einer irreduziblen Darstellung über, die nun gleich oder entgegengesetzt der ursprünglichen $\mathfrak{D}(f)$ ist, je nachdem ob $\chi(n) = +1$ oder $= -1$ ist.

Wir wollen nun untersuchen, wie die kanonischen Euler-Produkte sich bezüglich der irreduziblen Darstellungen verhalten. Das Zeichen n bedeutet bis zum Schluss dieses Paragraphen stets eine durch q nicht teilbare natürliche Zahl. Zerlegt man eine Funktion $F(\tau)$ vom Nebentypus in

$$F(\tau) = f(\tau) + f'(\tau),$$

wo $\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ und $\mathfrak{D}(f') = \mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$, was nach (33) (34) stets eindeutig möglich ist, so ist nach dem obigen

$$F \mid T_n = f \mid T_n + f' \mid T_n$$

die entsprechende Zerlegung für $F \mid T_n$. Jetzt habe $F(\tau)$ ein kanonisches Euler-Produkt, also $F \mid T_n = \lambda_n F$, dann ist

$$(60) \begin{cases} f \mid T_n = \lambda_n f, & f' \mid T_n = \lambda_n f', \quad \text{wenn } \chi(n) = +1 \\ f \mid T_n = \lambda_n f', & f' \mid T_n = \lambda_n f, \quad \text{wenn } \chi(n) = -1. \end{cases}$$

und daher

$$(61) \qquad (f - f') \mid T_n = \chi(n) \lambda_n (f - f').$$

Nach Satz 21 ist daher auch $f - f'$ Eigenfunktion aller T_m^q, hat also ein kanonisches Produkt. Ein solches Produkt heisse nun **zweigliedrig**, wenn weder f noch f' identisch verschwinden, im andern Falle **eingliedrig** und zwar zu $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ $\left(\text{resp. } \mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}\right)$ gehörig, wenn $F = f$ (resp. $F = f'$). Mit a_2 sei die Anzahl aller verschiedenen Paare $f + f'$, $f - f'$ von zweigliedrigen Spitzenformen mit kanonischem Produkt, mit a, a' die Anzahl der eingliedrigen Spitzenformen zu $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ und $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ bezeichnet. Dann ist

$$2a_2 + a + a'$$

die Anzahl aller Spitzenformen des Nebentypus, also die Zahl $Y(k)$ aus Satz 8, während

$$a_2 + a = y_1(k), \quad a_2 + a' = y_2(k)$$

die Anzahl aller Spitzenformen zu $\mathfrak{G}$ resp. $\mathfrak{G}'$ sind. Wir zeigen nun

Satz 26: Es gibt kein eingliedriges kanonisches Produkt zur Darstellung $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ (Nichtrest): $a' = 0$.

Beweis: $f'(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a(m) z^m$ sei eine Funktion zu $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ mit kanonischem Produkt. Darnach ist $a(m) = \lambda_m$ der Eigenwert von $f'(\tau)$ bei T_m^q und daher nach (60)

$$a(n) = 0, \text{ wenn } \chi(n) = -1.$$

Andrerseits ist $f'(\tau)$ Eigenfunktion von T_q^q, also nach (58) auch von $H \cdot W$, aber auch von W, weil $\mathfrak{D}(f')$ irreduzibel, daher wegen $W^2 = (-1)^k q$

$$f' \,|\, H = c \cdot f' \text{ mit konstanten } c. \tag{62}$$

Nun hat aber die Zugehörigkeit von $f'(\tau)$ zu $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ (Nichtrest) nach (36) zur Folge, dass in

$$f' \,|\, T = \sum_{m=0}^{\infty} b(m) z_q^m \tag{63}$$

alle $b(n) = 0$ sind, wo $\chi(n) = +1$. Aus (62) (63) folgt aber

$$b(m) = ca(m), \quad m = 0, 1, \ldots\ldots,$$

mithin ist $c \neq 0$ und alle $b(n) = 0$, $a(n) = 0$; bei einem kanonischen Euler-Produkt muss aber $a(1) = 1$ sein, was zum Widerspruch führt. Daraus folgt dann

Satz 27: Bei $q \equiv 1 \pmod 4$ gibt es überhaupt keine eingliedrigen kanonischen Euler-Produkte des Nebentypus. Bei $q \equiv 3 \pmod 4$ ist die Anzahl solcher eingliedrigen Spitzenformen zur Darstellung $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ (Rest) gleich $y_1(k) - y_2(k)$, also (für $q > 3, k > 1$) gleich der Klassenzahl des Körpers $K\left(\sqrt{-q}\right)$, nach Satz 9.

§ 4. Ganzzahlige quadratische Formen.

Es sei f eine grade natürliche Zahl und

$$Q(x) = Q\left(x_1, x_2, \ldots x_f\right) = \sum_{1 \leq r \leq s \leq f} b_{rs} x_r x_s = b_{11} x_1^2 + b_{12} x_1 x_2 + \ldots.$$

eine positiv-definite quadratische Form in den f Variabeln, deren Koeffizienten b_{rs} in dieser Schreibweise ganze rationale Zahlen sind. Das Doppelte derselben

$$2Q = \sum_{r,s=1}^{f} a_{rs} x_r x_s = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots = \sum_{r,s} \frac{\partial^2 Q}{\partial x_r\, \partial x_s} x_r x_s$$

heisse eine **grade Form**; hier sind die Koeffizienten der Quadrate x_r^2

$$a_{rr} = 2b_{rr}$$

während allgemein

$$a_{rs} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_r \partial x_s}$$

$$a_{rs} = a_{sr} = b_{rs} \quad (r < s)$$

Q werde **primitiv** genannt, wenn die b_{rs} ohne gemeinsamen Teiler sind. Zu der Form $2Q$ gehört die ganzzahlige symmetrische Matrix

$$\mathfrak{A} = (a_{rs}) \text{ vom Grade } f.$$

Ihre (positive) Determinante sei D und nach einem zweckmässigen Vorschlag von H. Brandt werde

$(-1)^{\frac{f}{2}} D = \Delta$ die »**Diskriminante**« von Q genannt:

$$(64) \qquad \Delta = \text{Diskr. } Q = (-1)^{\frac{f}{2}} \text{ Det.} \left| \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_r \partial x_s} \right) \right|.$$

Ist D ungrade, so ist übrigens stets

$$(65) \qquad (-1)^{\frac{f}{2}} D \equiv 1 \pmod 4).$$

Die Matrix $\mathfrak{A}$ besitzt eine symmetrische Reziproke

$$\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{D}(A_{rs}),$$

wobei A_{rs} die Unterdeterminanten $(2k-1)$-ten Grades von $\mathfrak{A}$ sind. Hier sind die Diagonalelemente A_{rr} wieder grade Zahlen, als Determinanten ungraden Grades, deren Matrizen mod 2 gleichzeitig symmetrisch und alternierend sind. Es bedeute weiter δ den grössten gemeinsamen Teiler

$$(66) \qquad \delta = \left(\frac{A_{11}}{2}, \ldots \frac{A_{rr}}{2}, \ldots, A_{rs}, \ldots \right),$$

sodass die Matrix

$$(67) \qquad \mathfrak{A}^* = \left(\frac{A_{rs}}{\delta} \right)$$

noch die Matrix einer graden quadratischen Form $2Q^*$ ist. Diese eindeutig durch Q bestimmte Form Q^* heisse die (primitive) **Adjungierte** von Q. Der Zusatz »primitiv« bei dieser Benennung mag im Folgenden der Einfachheit halber wegbleiben, da wir den sonst üblichen Begriff der Adjungierten in dieser Arbeit nicht verwenden.

Satz 28: $Q^{**} = \frac{1}{\beta} Q$, wo β der gr. gem. T. der Koeffizienten b_{rs} von Q ist.

Beweis: Nach (67) gilt allgemein

$$\mathfrak{A}^* = \frac{D}{\delta} \cdot \mathfrak{A}^{-1}$$

und wenn $\mathfrak{A}^{**}, D^*, \delta^*$ die entsprechende Bedeutung für Q^* haben, ist also

$$\mathfrak{A}^{**} = \frac{D^*}{\delta^*} \cdot \mathfrak{A}^{*-1} = \frac{D^* \cdot \delta}{\delta^* \cdot D} \cdot \mathfrak{A}.$$

Dabei ist

$$D^* = \text{Det. } \mathfrak{A}^* = \frac{D^{f-1}}{\delta^f}.$$

Da $\frac{1}{\beta} Q$ eine primitive Form und $\frac{1}{\beta}\mathfrak{A}$ die Matrix der graden Form $\frac{2Q}{\beta}$ ist, so gilt nach (67)

$$\frac{D^* \cdot \delta}{\delta^* \cdot D}\beta = 1, \quad \delta^* = \delta \cdot \frac{D^*}{D} \cdot \beta.$$

Die offenbar ganze Zahl

$$N = \frac{D}{\delta} \tag{68}$$

heisse die **Stufe der quadratischen Form Q**. Sie ist, abgesehen von dem Faktor 2, der höchste zusammengesetzte Elementarteiler der Matrix $\mathfrak{A}$.

Nach den obigen Formeln ist

$$\delta^* = \frac{\delta \cdot \beta}{D} \cdot \frac{D^{f-1}}{\delta^f} = \beta \cdot \frac{N^{f-1}}{D}$$

eine ganze Zahl und da β^f in D aufgeht, so ist β ein Teiler von N, und D ein Teiler von N^f. Daher

Satz 29: Zu gegebener Stufe N und Variabelnzahl f gibt es nur endlich viele Diskriminanten quadratischer Formen. Sie sind Teiler von N^f.

Satz 30: Stufe und Diskriminante einer quadratischen Form enthalten dieselben Primfaktoren.

Ist weiter Q, wie im Folgenden oft vorausgesetzt, eine primitive Form, so ist $\beta = 1$, und nach Satz 28 folgt $Q^{**} = Q$. Endlich hat für jede natürliche Zahl t die ganzzahlige Form Q dieselbe primitive Adjungierte Q^* wie die Form tQ.

Die zahlentheoretische Funktion $\varepsilon(n)$, welche für $n > 0$ durch das Restsymbol $\varepsilon(n) = \left(\frac{\Delta}{n}\right)$, und für $n < 0$ durch $\varepsilon(n) = (-1)^{\frac{f}{2}} \varepsilon(-n)$ definiert ist, heisse der **Charakter der quadratischen Form Q.** Es zeigt sich, dass dieses $\varepsilon(n)$ ein Restcharakter mod N ist. Dies folgt für uns am einfachsten als Nebenresultat aus der in § 5 entwickelten Theorie der Thetafunktionen (Satz 34). Die drei Angaben $\left(-\frac{f}{2}, N, \varepsilon(n)\right)$ werden zweckmässig als der **Typus von Q** bezeichnet.

Wenn $Q_1(x), Q_2(y)$ dieselbe Stufe N und die Charaktere $\varepsilon_1(n), \varepsilon_2(n)$ haben, so hat die Form $Q = Q_1(x) + Q_2(y)$ die Stufe N und den Charakter $\varepsilon_1(n) \cdot \varepsilon_2(n)$.

Zur Aufstellung von ganzzahligen Formen mit gegebener Diskriminante kann man in folgender Art vorgehen, die auch bei numerischen Rechnungen noch gut durchführbar ist. Ausgehend von einer ganzzahligen positiven Form $Q(x)$, deren Diskr. den Betrag D haben möge, gewinnt man unter Einführung von $f+1$ ganzzahligen Konstanten μ, g_i die Form

$$Q_1(x) = Q(x) + \mu \left(\sum_{i=1}^{f} g_i x_i \right)^2.$$

Zur Berechnung ihrer Diskr. $(-1)^{\frac{f}{2}} D_1$ benutzt man zweckmässig die Sprache der Matrizen-Theorie. Der Form $2\,Q(x)$ entspricht die ganzzahlige symmetrische Matrix $\mathfrak{A}$; die g_i und x_i fassen wir zu je einer Matrix $\mathfrak{g}, \mathfrak{x}$ von f Zeilen und einer Spalte zusammen, bezeichnen allgemein durch den Akzent $'$ die transponierte Matrix und haben dann

$$2\,Q(x) = \mathfrak{x}'\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}, \qquad \left(\sum g_i x_i\right)^2 = \mathfrak{x}'\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}'\,\mathfrak{x} = (\mathfrak{x}'\,\mathfrak{g})^2.$$

Die Matrix $\mathfrak{A}_1$ von $2\,Q_1$ ist also

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} + 2\mu\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}', \quad 2\,Q_1(x) = \mathfrak{x}'\mathfrak{A}_1\mathfrak{x},$$

und ihre Determinante

$$D_1 = |\mathfrak{A}_1| = D\,(1 + 2\mu\,\mathfrak{g}'\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{g}). \tag{69}$$

Um das einzusehen, transformiere man $\mathfrak{A}$ durch eine reelle Matrix $\mathfrak{M}$ in die Einheits-Matrix $\mathfrak{E}$

$$\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{M}' = \mathfrak{E}.$$

Dann ist

$$D_1\,|\,\mathfrak{M}\,|^2 = D_1\cdot D^{-2} = |\,\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{A}_1\cdot\mathfrak{M}'\,| = |\,\mathfrak{E} + 2\mu\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}'\mathfrak{M}'\,|.$$

Setzt man $\mathfrak{v} = \mathfrak{M}\cdot\mathfrak{g}$ mit den Komponenten $v_1, \ldots v_f$, so ist

$$\mathfrak{x}'\,(\mathfrak{E} + 2\mu\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}'\mathfrak{M}')\,\mathfrak{x} = \sum x_i^2 + 2\mu\left(\sum v_i x_i\right)^2.$$

Durch eine orthogonale Substitution, deren erste Zeile

$$y_1 = \frac{1}{\rho}\sum v_i x_i \text{ mit } \rho = \sqrt{\sum v_i^2}$$

lautet, geht diese Form über in

$$\sum_{i=1}^{f} y_i^2 + 2\mu y_1^2 \sum_{i=1}^{f} v_i^2,$$

und deren Determinante ist offenbar

$$1 + 2\mu \sum_{i=1}^{f} v_i^2 = 1 + 2\mu\mathfrak{v}'\mathfrak{v} = 1 + 2\mu\mathfrak{g}'\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{g},$$

womit (69) bewiesen ist. Gleichzeitig erkennt man, dass auch Q_1 positiv ist, wenn nur $D_1 > 0$. Für die reziproke Matrix zu $\mathfrak{A}_1$ findet man

$$\mathfrak{A}_1^{-1} = \mathfrak{A}^{-1} - 2\mu\frac{D}{D_1}\quad\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}'\mathfrak{A}^{-1}$$

$$D_1\mathfrak{x}'\mathfrak{A}_1^{-1}\mathfrak{x} = D_1\mathfrak{x}'\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{x} - 2\mu D(\mathfrak{x}'\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{x})^2.$$

Führt man die Teiler $\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_1$ von Q und Q_1 nach (66) ein und damit die adjungierten Formen Q^* und Q_1^*, so erhält man

$$D_1\mathfrak{x}'\mathfrak{A}_1^{-1}\mathfrak{x} = 2\mathfrak{d}_1 Q_1^*(x), \quad D\mathfrak{x}'\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{x} = 2\mathfrak{d}\,Q^*(x)$$

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{d}}{D}\sum_{i=1}^{f} g_i \frac{\partial Q^*}{\partial x_i}$$

$$D_1 = D + 4\mu\mathfrak{d}\,Q^*(g)$$

$$\mathfrak{d}_1 Q_1^*(x) = \frac{D_1}{D}\mathfrak{d}\,Q^*(x) - \frac{\mu}{D}\mathfrak{d}^2\left(\sum_{i=1}^{f} g_i \frac{\partial Q^*}{\partial x_i}\right)^2.$$

Speziell folgt noch für $\mathfrak{x} = \mathfrak{g}$

$$\mathfrak{d}_1 Q_1^*(g) = \mathfrak{d}\,Q^*(g).$$

Nimmt man $Q(x) = \sum x_i^2$, $\mathfrak{A} = 2\mathfrak{E}$, so ist bei ungraden μ, g_i die Form

$$\frac{1}{2}Q(x) = \frac{1}{2}\left(\sum x_i^2 + \mu\left(\sum g_i x_i\right)^2\right)$$

noch ganzzahlig, ihre Diskr. hat den Betrag

(70) $$K = 1 + \mu \sum_{i=1}^{f} g_i^2$$

und ihre Adjungierte ist die gleiche wie die zu $Q(x)$, also gleich

$$\frac{K}{2} \sum x_i^2 - \frac{\mu}{2} \left(\sum g_i x_i\right)^2.$$

Zusammenfassend formulieren wir

Satz 31: Q sei eine positive ganzzahlige Form mit Diskr. $(-1)^{\frac{f}{2}} D$. Mit ganzem μ, g_i ist auch

$$Q_1(x) = Q(x) + \mu \left(\sum g_i x_i\right)^2$$

positiv, wenn die Determinante von $2\,Q_1(x)$,

$$D_1 = D + 4 \mu \delta\, Q^*(g)$$

positiv ist. Die Adjungierte zu Q_1 ist gegeben durch

$$\delta_1 Q_1^*(x) = \frac{D_1}{D} \delta\, Q^*(x) - \frac{\mu}{D} \delta^2 \left(\sum_{i=1}^{f} g_i \frac{\partial Q^*}{\partial x_i} \right)^2.$$

§ 5. Kugelfunktionen von f Variabeln.

Unter einer Kugelfunktion ν-ter Ordnung im f-dimensionalen Raum R_f versteht man ein homogenes Polynom $P_\nu(x_1, \ldots x_f)$ mit komplexen Koeffizienten von der Dimension ν in den f Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_f$, welches der Differentialgleichung genügt

(71) $$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 P}{\partial x_f^2} = 0.$$

Nennt man zwei stetige Funktionen F, G der $x_1, \ldots x_f$ orthogonal, wenn[1]

$$\int F \cdot \overline{G}\, dx_1 \ldots dx_f = 0 \tag{72}$$

und F normiert, wenn

$$\int F \cdot \overline{F}\, dx_1 \ldots dx_f = 1 \tag{73}$$

(die Integrale sind über das Innere der f-dimensionalen Einheitskugel zu erstrecken), so ist die obige Definition einer Kugelfunktion P_ν gleichwertig mit folgender: P_ν ist orthogonal zu allen homogenen Polynomen von kleinerer als ν-ter Dimension.

Durch eine beliebige orthogonale Transformation der x geht offenbar jede Kugelfunktion P_ν wieder in eine Kugelfunktion derselben Ordnung ν über. Eine Kugelfunktion P_ν ist z. B.

$$\left(\sum_{r=1}^{f} \zeta_r x_r\right)^\nu \tag{74}$$

wobei $\zeta_1, \ldots \zeta_f$ irgend welche f komplexe Konstante mit der Quadratsumme 0 sind. Man erhält die allgemeinste Kugelfunktion ν-ter Ordnung, indem man die Ausdrücke (74), gebildet mit beliebigen zulässigen Konstanten ζ linear kombiniert.

Satz 32: Die Anzahl der linear unabhängigen Kugelfunktionen ν-ter Ordnung im R_f ist

$$\frac{(f+\nu-3)!}{(f-2)!\,\nu!}(f+2\nu-2) \quad (f \geqq 2, \quad \nu = 1, 2 \ldots).$$

Der Beweis folgt leicht durch Abzählung der Orthogonalitätsbedingungen. Da zunächst jedes homogene Polynom grader

[1] $\overline{\alpha}$ bedeutet die konjugiert-komplexe Grösse zu α.

Dimension orthogonal zu jedem solchen von ungrader Dimension ist, so genügt es, dass P_ν orthogonal zu allen homogenen Polynomen der Dimensionen $\nu-2$, $\nu-4$, $\nu-6$ ... ist. Bedeutet Q_μ ein homogenes Polynom der Dimension μ, so ist aber ein bestimmtes Q_ν schon orthogonal zu allen $Q_{\nu-2}, Q_{\nu-4}, \ldots$, wenn es nur orthogonal zu allen $Q_{\nu-2}$ ist, weil wegen der Homogenität die Orthogonalität zu $Q_{\nu-4}$ gleichbedeutend mit der zu $\left(\sum_{r=1}^{f} x_r^2\right) Q_{\nu-4}$ ist, u. s. f. Man bezeichne die Anzahl der linear unabhängigen Q_μ mit festem μ mit $\alpha(\mu)$, so ist daher die Anzahl der unabhängigen Bedingungen für eine Kugelfunktion P_ν gleich $\alpha(\nu-2)$. Für $\alpha(\nu)$ findet man den Wert

$$\alpha(\nu) = \binom{f+\nu-1}{\nu}$$

und damit ergibt sich die Behauptung von Satz 32.

Die Kugelfunktionen mit demselben f, ν lassen sich auf eine einzige Funktion einer Variabeln in folgender Art zurückführen: In der Schar dieser Kugelfunktionen wähle man nämlich als Basis k reelle orthogonale und normierte Elemente $F_1, F_2, \ldots F_k$. Dann ist

$$\sum_{l=1}^{k} F_l(x_1, \ldots x_f) \cdot F_l(y_1, y_2 \ldots y_f)$$

eine Orthogonal-Invariante der beiden Reihen x und y und als Polynom daher ein Polynom in den drei Grundinvarianten $\sum x_r^2$, $\sum y_r^2$, $\sum x_r y_r$. Aus der Homogenität folgt dann weiter, dass dieser Ausdruck von der Gestalt sein muss

$$(75) \qquad c H_\nu(u) \cdot \left(\sum x_r^2 \cdot \sum y_r^2\right)^{\frac{\nu}{2}}$$

mit

$$u = \frac{\sum x_r y_r}{\sqrt{\sum x_r^2 \cdot \sum y_r^2}}. \tag{76}$$

Dabei ist $H_\nu(u)$ ein Polynom des Grades ν in der einen Variabeln u. Einen konstanten Faktor c lassen wir bei der Definition von H_ν noch offen. Der obige Ausdruck (75) genügt für alle Wertsysteme y in den Variabeln x der Differentialgleichung (71). Rechnet man diese Gleichung auf die Variable u um, so erhält man für H_ν die Gleichung

$$(1-u^2)\frac{d^2 H_\nu}{du^2} - u(f-1)\frac{dH_\nu}{du} + \nu(f+\nu-2)H_\nu = 0. \tag{77}$$

Diese Differentialgleichung besitzt ein einziges Integral, das ein Polynom ist, eben jenes $H_\nu(u)$, und letzteres ist also hierdurch bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Die Orthogonalitätsbedingungen der P_ν lauten in u

$$\int_{-1}^{+1} H_\nu(u) H_\mu(u)(1-u^2)^{\frac{f-3}{2}} du = 0 \quad (\nu \neq \mu) \tag{78}$$

und hieraus schliesst man auch

$$H_\nu(u) = \frac{c}{(1-u^2)^{\frac{f-3}{2}}} \cdot \frac{d^\nu}{du^\nu}\left[(1-u^2)^{\nu+\frac{f-3}{2}}\right]$$

mit konstantem c. Für $f = 3$ ist H_ν bekanntlich das Legendre-Polynom ν-ten Grades in u. Die ersten H_ν sind

$$\left\{\begin{aligned} & H_0(u) = 1, \qquad H_1(u) = u, \\ & H_2(u) = u^2 - \frac{1}{f}, \quad H_3(u) = u^3 - u\frac{3f+3}{(f+1)(f+2)}, \\ & H_4(u) = u^4 - \frac{6}{f+4}u^2 + \frac{3}{(f+2)(f+4)}. \end{aligned}\right. \tag{79}$$

Eine Kugelfunktion $P_\nu(x_1, \ldots x_f)$ bezüglich einer positiven quadratischen Form Q ist ein homogenes Polynom ν-ter Dimension in den x, welches nach einer linearen Transformation der x auf neue Variable y, wodurch Q in die Form $\sum_1^f y_r^2$ übergeht, eine wie oben definierte Kugelfunktion ν-ter Ordnung im R_f in den y wird

Man erhält also die Schar aller Kugelfunktionen ν-ter Ordnung bezüglich Q, indem man alle linearen Kombinationen der Polynome

$$(80)\qquad P_\nu(x) = H_\nu\left(\frac{\frac{1}{2}\sum_r y_r \frac{\partial Q}{\partial x_r}}{\sqrt{Q(x)\cdot Q(y)}}\right)\cdot\big(Q(x)\cdot Q(y)\big)^{\frac{\nu}{2}}$$

für beliebige Parameterwerte y bildet.

In einer für numerische Rechnung brauchbaren Form erhält man die Kugelfunktionen 2. Ordnung auf folgende Art: Die Anzahl der Kugelfunktionen 2. Ordnung im R_f ist nach Satz 32

$$\frac{(f-1)(f+2)}{2} = \frac{f(f+1)}{2} - 1.$$

Wir nehmen die Bezeichnungen vom vorigen Paragraphen wieder auf: Die positive ganzzahlige grade Form $2\,Q(x) = \sum_{r,s=1}^f a_{rs} x_r x_s$ in f Variabeln mit der Matrix $\mathfrak{A} = (a_{rs})$ definiert die Matrix

$$\mathfrak{A}^* = N\cdot\mathfrak{A}^{-1} = \frac{1}{\delta}(A_{rs})$$

Satz 33: Die quadratischen Polynome in x

$$\varphi_{rs} = x_r x_s - \frac{1}{f}\frac{A_{rs}}{D}\cdot 2\,Q(x) = x_r x_s - \frac{1}{fN}\frac{A_{rs}}{\delta}\cdot 2\,Q(x)\quad (r, s = 1, \ldots f)$$

genügen der linearen Relation

$$\sum_{r,s=1}^{f} a_{rs}\,\varphi_{rs} = 0$$

und sind genau $\frac{f(f+1)}{2} - 1$ linear unabhängige Polynome. Sie bilden eine Basis für die Schar der Kugelfunktionen 2. Ordnung bezüglich Q.

Denn die lineare Kombination der φ_{rs}

$$\sum_{r,l,s,p} a_{rl}\,a_{sp}\,\varphi_{rs}\,y_l\,y_p$$

stellt den Ausdruck (80) für $\nu = 2$ dar, der alle Kugelfunktionen 2. Ordnung erzeugt.

§ 6. Die Thetareihen als Modulformen und ihr Verhalten bei den Operatoren T_n.

Es sei wie in § 4: $2\,Q$ eine positive grade quadratische Form mit einer graden Zahl f von Variabeln, $\mathfrak{A} = (a_{rs})$ sei ihre Matrix, endlich $P_\nu\big((x)\big)$ eine Kugelfunktion ν-ter Ordnung in Bezug auf Q. Wir bilden die f-fach unendliche Reihe

$$(81) \qquad \vartheta(\tau, P_\nu, Q) = \sum_{((n))} P_\nu(n_1, n_2, \ldots n_f)\, z^{Q(n_1, \ldots n_f)}.$$

Speziell werde noch gesetzt für $\nu = 0$, $P_\nu \equiv 1$

$$\vartheta(\tau, Q) = \sum_{((n))} z^{Q((n))} = \sum_{m=0}^{\infty} a(m, Q)\, z^m,$$

wo dann $a(m, Q)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen $(x_1, \ldots x_f)$ von

$$m = Q(x_1, \ldots x_f)$$

bedeutet. Dann gelten folgende von Herrn B. SCHOENEBERG[1] bewiesenen Sätze 34—36:

Satz 34: Jede Reihe (81) ist eine Modulform eines reellen Typus $\left(-\left(\frac{f}{2}+\nu\right), N, \varepsilon(d)\right)$. Die Stufe N ist identisch mit der Stufe der quadratischen Form Q (§ 4), der Charakter $\varepsilon(n)$ ist

$$(82) \qquad \varepsilon(n) = \left(\frac{\Delta}{n}\right) \text{ für } n > 0; \quad \varepsilon(-n) = (-1)^{\frac{f}{2}} \cdot \varepsilon(n);$$

dabei Δ die Diskriminante von Q

$$\Delta = (-1)^{\frac{f}{2}} \cdot \text{Det.} \left|\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x_r \partial x_s}\right)\right|.$$

Satz 35: Wenn $\nu > 0$, so ist $\vartheta(\tau, P_\nu; Q)$ eine Spitzenform.

Um die invariante Schar zu beschreiben, welche durch ein solches ϑ und seine Konjugierten $\vartheta \mid L$ erzeugt wird, führen wir noch weitere Funktionen ein: Wir verstehen unter $\mathfrak{h}$ einen Vektor mit f ganzzahligen Komponenten h_i, die den Kongruenzen

$$(83) \qquad \sum_{s=1}^{f} a_{rs} h_s \equiv 0 \ (\text{mod.}\, N)$$

genügen. Wir setzen dann

$$(84) \qquad \vartheta(\tau, P_\nu, Q, \mathfrak{h}) = \sum_{n_i \equiv h_i (N)} P_\nu\big((n)\big)\, z_N^{\frac{Q((n))}{N}}.$$

Wegen (83) ist der Exponent von z_N in der Summe stets

[1] A. SCHOENEBERG, Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen, Math. Ann. 116 (1939). Man beachte die Berichtigung am Schluss des Bandes, S. 780.

eine ganze Zahl. Die Reihe mit $\mathfrak{h} = 0$ ist offenbar die Ausgangsreihe

$$\vartheta(\tau, P_\nu, Q, 0) = N^\nu \vartheta(\tau, P_\nu, Q).$$

Die Reihen (84) sind nicht linear unabhängig, z. B. ist

$$\vartheta(\tau, P_\nu, Q, -\mathfrak{h}) = (-1)^\nu \vartheta(\tau, P_\nu, Q, \mathfrak{h}).$$

Satz 36: Die mit festem Q, P_ν durch (84) für alle zulässigen $\mathfrak{h}$ erzeugte lineare Schar besteht aus Modulformen der Dimension $-\left(\frac{f}{2}+\nu\right)$ und der Stufe N, und ist eine invariante Schar bei den Operatoren L aus $\bar{\Gamma}(1)$.

Die Darstellung der endlichen Modulargruppe $\overline{\mathfrak{M}}(N)$ mod N, welche im Sinne von § 2 durch diese invariante Schar definiert wird, brauchen wir für die Zwecke unserer Arbeit nicht genauer zu kennen; überhaupt wird später von dem Satz 36 und den Reihen mit dem Parameter $\mathfrak{h}$ nur die Folgerung benutzt, dass die erwähnte Darstellung eine irreduzible Darstellung vom Grade $\frac{q+1}{2}$ ist, wenn die Determinante (nicht nur die Stufe!) eine ungrade Primzahl q ist.

Bei der Herleitung der obigen Aussagen spielt die bekannte Transformationsformel der Thetareihen die Hauptrolle. Sie ist auch sonst für unsere Theorie von grosser Bedeutung und lautet in unserer Bezeichnung und unter Einbeziehung der sonst wohl nicht verwendeten P_ν:

Satz 37:

$$\frac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, P_\nu, Q\right)}{(-i\tau)^{\frac{f}{2}+\nu}} = \frac{(-i)^\nu}{|\sqrt{\Delta}|}\,\vartheta\left(\frac{\tau}{N}, P_\nu^*; Q^*\right).$$

Hier bedeutet Q^* die (primitive) adjungierte Form zu Q, und $P_\nu^*((y))$ ist diejenige durch P_ν, Q eindeutig bestimmte

Kugelfunktion bezüglich Q^*, welche aus $P_\nu\big((x)\big)$ durch die Substitution $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{y}$ entsteht. Als speziellen wichtigen Fall sprechen wir die bekannte Formel für $\nu = 0, P_\nu \equiv 1$ aus:

$$(85) \qquad \frac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, Q\right)}{(-i\tau)^{\frac{f}{2}}} = \frac{1}{|\sqrt{\Delta}|}\,\vartheta\left(\frac{\tau}{N}, Q^*\right).$$

Auf Grund dieser Tatsachen haben wir die Möglichkeit, die in § 2 und 3 dargestellte Theorie der Modulfunktionen eines reellen Typus anzuwenden und dadurch Sätze über die quadratische Form Q zu gewinnen.

Von den Thetareihen mit $\nu > 0$ können natürlich viele identisch verschwinden. Indes gilt

Satz 38: Die Reihen $\vartheta(\tau, P_2, Q)$ mit $\nu = 2$ können nur dann für alle zulässigen P_2 identisch verschwinden, wenn für alle natürlichen Zahlen m

$$m \cdot a(m, Q) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} N \cdot \frac{f}{2}\right).$$

Das folgt sofort aus der expliziten Angabe der P_2 in Satz 33.

Aus Satz 23 und 24 der allgemeinen Theorie folgt

Satz 39: Mit einer quadratischen Form Q und einer dazugehörigen Kugelfunktion P_ν der Ordnung ν bilde man die Dirichlet-Reihe

$$\varphi(s, P_\nu, Q) = \sum_{((n))}{}' P_\nu\big((n)\big) \cdot Q\big((n)\big)^{-s}.$$

Die reduzierte Reihe hierzu, $\tilde{\varphi}(s, P_\nu, Q)$, ist dann, falls sie nicht identisch verschwindet, als lineare Kombination von eindeutig bestimmten kanonischen Euler-Produkten darstellbar.

Satz 40: Auch die Reihe $\varphi(s, P_\nu, Q)$ selbst ist als lineare Kombination von kanonischen Euler-Produkten darstellbar, wenn der Charakter

$$\varepsilon(n) = \left(\frac{\Delta}{n}\right), \quad (n > 0),$$

ein eigentlicher Charakter mod der Stufe N ist.

Diese Voraussetzung ist z. B. dann sicher erfüllt, wenn die Diskriminante Δ (und damit auch N) eine quadratfreie Zahl ist, aber auch dann, wenn N eine ungrade Primzahl und gleichzeitig Δ kein Quadrat ist. Die Voraussetzung ist gleichwertig mit dieser: Die Diskriminante des quadratischen Körpers $K(\sqrt{\Delta})$ soll gleich $(-1)^{\frac{f}{2}} \cdot N$ sein.

Die Höchstzahl der erforderlichen Euler-Produkte ist für beide Sätze durch die Zahl $K = \left[\frac{\mu_0(N) \cdot k}{12}\right] + 2$ gegeben, wo $k = \frac{f}{2} + \nu$ und $\mu_0(N)$ die Zahl (16) ist, welche nur von der Stufe der Form Q abhängt. Die Euler-Produkte selbst sind die des Typus $\left(-\left(\frac{f}{2} + \nu\right), N, \varepsilon\right)$, bezw. deren reduzierte. Dabei ist $\left(-\frac{f}{2}, N, \varepsilon\right)$ der Typus der Form Q, unabhängig von ν. Im weiteren Verlauf wird sich noch ergeben

Satz 41: Die Koefficienten in den reduzierten kanonischen Euler-Produkten $\tilde{\varphi}(s) = \sum_1^\infty \lambda_n n^{-s}$ zu Spitzenformen sind ganze algebraische Zahlen, gehören einem Körper vom Grade $\leqq K$ an, und

$$\lambda_n \cdot \sqrt{\varepsilon(n)^{-1}} \text{ ist reell.}$$

Wir entwickeln jetzt ein finites Verfahren zur Konstruktion dieser Euler-Produkte. Dazu ist also die kleinste abgeschlossene Schar zu ermitteln, welche eine gegebene

Funktion $f(\tau)$ enthält, d. h. die lineare Schar, welche aus allen $f \,|\, T_m^N$ mit $m = 1, 2, \ldots\ldots$ erzeugt wird. Wir werden angeben, auf welche Weise man κ ganze Zahlen $m_1, \ldots\ldots m_\kappa$ berechnen kann, sodass die κ Funktionen $f \,|\, T_{m_\rho}^N$ eine Basis dieser Schar bilden, und wie man Konstante c_ρ finden kann, sodass $\sum\limits_\rho c_\rho f \,|\, T_{m_\rho}$ ein kanonisches Produkt hat.

Ich schreibe von nun an, weil die Formeln klarer werden, T_m an Stelle von T_m^N ohne oberen Index. Aus dem Zusammenhang ist immer eindeutig ersichtlich, dass diese Operatoren T_m auf Funktionen vom Teiler N angewendet werden, sobald $(m, N) > 1$. Für die n mit $(n, N) = 1$ ist aber $T_n^N = T_n^1 = T_n$. Bei einer Reihe $f(\tau)$ vom reellen Typus $\big(-k, N, \varepsilon(d)\big)$ hat der Operator T_m die Bedeutung

$$f \,|\, T_m = m^{f-1} \sum_{\substack{ad = m,\ b \bmod d \\ d > 0}}{}' \varepsilon(a)\, f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right) d^{-k}$$

$\big(\varepsilon(a)$, wie üblich, gleich 0, wenn $(a, N) > 1\big)$. Für die Koeffizienten der Potenzreihe

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a(n)\, z^n$$

folgt also

$$f \,|\, T_m = \sum_{n=0}^{\infty}{}' b_m(n)\, z^n \text{ mit} \tag{86}$$

$$b_m(n) = \sum_{d \,|\, (m, n)}{}' \varepsilon(d)\, d^{k-1}\, a\left(\frac{nm}{d^2}\right). \tag{87}$$

Speziell ist also für eine Primzahl $m = p$, die nicht in der Stufe aufgesteht,

$$b_p(n) = a(pn) + \varepsilon(p)\, p^{k-1}\, a\left(\frac{n}{p}\right), \quad (p, N) = 1.$$

($a(r)$ ist $= 0$ zu setzen, wenn r keine ganze Zahl ist). Und für eine Primzahl q, welche in der Stufe N aufgeht, ist

$$b_q(n) = a(qn), \quad (q \mid N).$$

Zur Konstruktion des kleinsten abgeschlossenen Systems, das eine gegebene Funktion $f(\tau)$ enthält, ist dann die lineare Schar zu bilden, welche aus den unendlich vielen $f \mid T_m\,(m = 1, 2, \ldots\ldots)$ entsteht. Hier gilt nun der folgende wichtige

Satz 42: Die kleinste abgeschlossene Schar von Modulformen, welche ein gegebenes $f(\tau)$ vom reellen Typus $\big(-k, N, \varepsilon(d)\big)$ mit $f(\infty) = 0$ enthält, wird bereits erzeugt durch die endlich vielen Funktionen $f \mid T_m$ mit $1 \leqq m \leqq \frac{\mu_0(N)\,k}{12} + 2$. ($\mu_0(N)$ ist der Index der Gruppe $\Gamma_0(N)$ in der vollen Modulgruppe und hat den in Gl. (16) angegebenen Wert).

Beweis. Es sei $F^\rho\,(\rho = 1, \ldots \kappa)$ eine Basis für die abgeschlossene Schar der $f \mid T_m\,(m = 1, 2, \ldots\ldots)$. Dann besteht also für jedes natürliche m ein System von Gleichungen (vgl. (49)—(51)

$$F^\rho \mid T_m = \sum_\sigma \lambda_{\rho\sigma}(m)\, F^\sigma; \quad m = 1, 2, \ldots\ldots$$

Andrerseits ist mit konstanten c_ρ

$$f = \sum_\rho c_\rho F^\rho$$

und daher

$$f_m = f \,|\, T_m = \sum_{\sigma}{}' u_\sigma(m) F^\sigma,$$

$$u_\sigma(m) = \sum_{\rho}{}' c_\rho \lambda_{\rho\sigma}(m), \quad m = 1, 2, \ldots$$

Die Behauptung bedeutet, dass bereits die Schar der f_m mit $m = 1, 2, \ldots K$, wo $K = \left[\frac{\mu_0 k}{12}\right] + 2$, linear äquivalent mit den κ Funktionen F^ρ ist. Wäre das nicht der Fall, so hätte die endliche $\kappa \times K$-Matrix

$$u_\sigma(m), \quad \sigma = 1, \ldots \kappa; \quad m = 1, 2, \ldots \ldots K$$

einen Rang $\leqq \kappa - 1$; also wären die K Gleichungen für die κ Unbekannten x_σ lösbar, mit nicht sämtlich verschwindenden x_σ,

$$\sum_{\sigma}{}' x_\sigma u_\sigma(m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots K.$$

Hierfür würde dann sein

$$\sum_{\rho, \sigma}{}' x_\sigma c_\rho \lambda_{\rho\sigma}(m) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots K. \tag{88}$$

Die unendliche Reihe

$$\sum_{\rho, \sigma}{}' x_\sigma c_\rho \sum_{m=1}^{\infty}{}' \lambda_{\rho\sigma}(m) z^m$$

ist nun nach (49 a) ebenfalls in der F-Schar enthalten, und nach (88) verschwinden die ersten K Koeffizienten in dieser Reihe. Bei einer Modulform eines reellen Typus folgt aber hieraus nach Satz 2 ihr identisches Verschwinden. Mithin bestehen die Gleichungen (88) auch für alle $m \geqq K + 1$. Dann hat aber auch die *unendliche* Matrix der $u_\sigma(m)$ einen

Rang $\leqq \kappa - 1$. Dies bedeutet nun, dass unter den unendlich vielen Funktionen

$$f \mid T_m = \sum_{\sigma}{}' u_\sigma(m) F^\sigma$$

höchstens $\kappa - 1$ linear unabhängige vorhanden sind, gegen die Definition von κ.

Die Schranke K für die erforderlichen m-Werte lässt sich noch verkleinern, worauf wir indes hier nicht einzugehen brauchen. Ist $f(\tau)$ bei $\tau = \infty$ nicht Null, so kann sie durch Addition einer passenden Eisenstein-Reihe desselben Typus in eine solche Form übergeführt werden; das Verhalten der Eisenstein-Reihen bei den T_m ist elementar bekannt. Es gilt dann also auch für allgemeine Formen dieses Typus ein ähnlicher Satz. Man kann diesen durch Einführung eines Operators T_0 aussprechen, der der Matrix $\lambda(0)$ korrespondiert.

Um jetzt zu einer Reihe $\vartheta(\tau, P_\nu, Q)$ vom Typus $\left(-\left(\frac{f}{2}+\nu\right), N, \varepsilon(d)\right)$ das abgeschlossene System von Modulfunktionen zu konstruieren, hat man also erst die eben erwähnte Eisenstein-Reihe $E(\tau)$ zu finden. Ist $\nu > 0$, so ist nach Satz 35 $E(\tau)$ identisch 0 zu setzen. Im andern Fall kann man $E(\tau)$ gleich so wählen, dass eine Spitzenform entsteht; dann stellen die Koeffizienten von z^m in $E(\tau)$ die asymptotischen Näherungswerte der Anzahlen $a(m, Q)$ dar; sie haben die Gestalt

$$\sum_{d \mid m}{}' c\left(d, \frac{m}{d}\right) d^{\frac{f}{2}-1},$$

wo $c(x_1, x_2)$ nur von den Restklassen der x_1, x_2 mod N abhängt. Die Funktion $c(x_1, x_2)$ selbst ist für alle quadratischen Formen Q aus demselben arithmetischen Geschlecht die gleiche und ist bestimmt durch das Verhalten der ϑ-Reihe in den rationalen Spitzen des Fundamentalbereiches der Gruppe $\Gamma_0(N)$. Explizite Formeln dafür folgen aus der Methode von HARDY-LITTLEWOOD oder aus der allgemeinen Theorie der quadratischen Formen von Herrn SIEGEL, oder endlich aus meiner Theorie der Eisenstein-Reihen. In jedem Fall ist dabei die Berechnung der Werte von L-Reihen $L\left(\frac{f}{2}, \chi\right)$ mit gewissen quadratischen Restcharakteren χ mod N erforderlich. Für eine Primzahl $N = q$, wo nur zwei rationale Spitzen in Frage kommen, wird nachher durch die Formeln aus § 2 diese Reihe $E(\tau)$ angegeben werden. Bei allen N ist jedenfalls die Dirichlet-Reihe zu $E(\tau)$ von der Gestalt

$$\sum_{\chi_1, \chi_2} C(\chi_1, \chi_2)(t_1 t_2)^{-s} L\left(s - \frac{f}{2} + 1, \chi_1\right) \cdot L(s, \chi_2)$$

mit konstanten C. Hierbei durchlaufen t_1, t_2 die Teiler von N und χ_1, χ_2 sind gewisse Restcharaktere mod $\frac{N}{t_1}$ bezw. mod $\frac{N}{t_2}$.

Nach der Ermittelung von $E(\tau)$ wende man nun die Theorie auf die bei $\tau = \infty$ verschwindende Modulform

$$f(\tau) = \vartheta(\tau, P_\nu, Q) - E(\tau)$$

an. Dazu bilde man nach Formel (86)

$$f_m = f \mid T_m \qquad \text{für } m = 1, 2, \ldots . K$$

und stelle die Anzahl κ der linear unabhängigen unter ihnen fest. Das lässt sich durch Auflösen linearer Gleichungen allein aus den ersten K Koeffizienten der f_m entscheiden, und hierzu braucht man nach (87) nur die Kenntnis der ersten K^2 Koeffizienten von $f(\tau)$, d. h. von ϑ. Es seien etwa die $\varkappa$ Funktionen f_{n_ρ} mit

$$(89) \qquad n_1 = 1, n_2, \ldots n_\varkappa; \quad f_{n_\rho} = F^\rho = f \,|\, T_{n_\rho} \quad (n_\rho \leqq K)$$

die unabhängigen. Sie bilden nach Satz 42 also die kleinste abgeschlossene Schar, welche die Reihe $f(\tau)$ enthält. Nach der allgemeinen Theorie gilt

Satz 43: Die Dirichlet-Reihen $\varphi^\rho(s)$ zu den F^ρ lassen sich mit Hilfe gewisser konstanter vertauschbarer Matrizen B^ν des Grades $\varkappa$ zu einer Matrix $\Phi(s) = \sum_\nu \varphi^\nu(s) \cdot \mathsf{B}^\nu$ vereinigen, welche ein kanonisches Euler-Produkt des Typus $(-k, N, \varepsilon)$ ist. Die Bestimmung der B^ν erfolgt durch rationales Rechnen aus den ersten K^3 Koeffizienten von f.

Beweis. Die Existenz der B^ν mit der Produkteigenschaft ist in der allgemeinen Theorie ausgesprochen. Zur Berechnung der B^ν gehen wir auf die Potenzreihen F^ρ zurück. Nach Satz 42 bestimmen wir die Matrizen $\lambda(m)$ aus

$$F^\rho \,\big|\, T_m = \sum_\sigma \lambda_{\rho\sigma}(m) F^\sigma \qquad 1 \leqq m \leqq K.$$

Das geschieht durch Auflösen linearer Gleichungen unter Benutzung der ersten mK Koeffizienten der F^ρ. Insgesamt brauchen wir also höchstens K^2 Koeffizienten der einzelnen F^ρ, d. h. nach (87) höchstens K^3 Koeffizienten der Ausgangsreihe ϑ. Die $\varkappa^2$ Funktionen

$$f_{\rho\sigma}(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{\rho\sigma}(m)\, z^m$$

gehören nun nach (50) der linearen Schar der F^ρ an und die Konstanten $b^\alpha_{\rho\sigma}$ kann man daher vermöge der Gleichungen

$$f_{\rho\sigma}(\tau) = \sum_{\alpha} b_{\rho\sigma}^{\alpha} F^{\alpha}$$

aus den ersten bereits bekannten $\lambda_{\rho\sigma}(m)$ mit $m \leqq K$ rational berechnen. Damit haben wir die Matrizen

$$\mathsf{B}^{\alpha} = \left(b_{\rho\sigma}^{\alpha}\right)$$

und

$$\mathsf{B}(\tau) = \left(f_{\rho\sigma}(\tau)\right) = \sum_{\alpha} F^{\alpha}(\tau) \cdot \mathsf{B}^{\alpha} = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m)\, z^{m}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Zum Beweise endlich von Satz 41 hat man dann nur zu zeigen, dass die B^{ν} rationale Koeffizienten haben, und wähle zu diesem Zwecke als $E(\tau)$ eine Eisenstein-Reihe in folgender Art: Der Charakter $\varepsilon(n)$ definiert in bekannter Weise einen eigentlichen Charakter $\varepsilon_1(n)$ nach einem ganz bestimmten Teiler N_1 von N mit $\varepsilon_1(n) = \varepsilon(n)$ für $(n, N) = 1$. Hiermit bilde man analog zu (26) mit einer passenden Konstanten c die Eisenstein-Reihe

$$c \sum_{t \bmod N_1} \varepsilon_1(t)\, G_k(\tau, 0, t; N_1)$$

ihre Potenzreihe hat nach den bekannten Formeln (T_n I, § 1) nach Berechnung der Werte $L(k, \varepsilon_1)$ wie in § 2 rationale Koeffizienten und das konstante Glied $\neq 0$.

Um sich klar zu machen, was die Darstellung eines $\varphi(s, Q)$ als lineare Kombination von kanonischen Produkten für die Koeffizienten $a(m, Q)$ von $\varphi(s, Q)$ bedeutet, bedenke man, dass die Potenzreihe jedes dieser kanonischen Produkte in der Schar der f_{n_ρ} vorkommt, also ein Ausdruck von der Gestalt

$$\sum_{\rho} c_{\rho} f_{n_\rho} = \sum_{m=0}^{\infty} B(m)\, z^{m}$$

mit konstanten c_ρ ist. Die Koeffizienten $B(m)$ dieser Reihe haben das Multiplikationsgesetz (49). Nehmen wir als einfachsten Fall ein m, das zu den akzessorischen Werten $n_1, n_2, \ldots n_\kappa$ aus (89) teilerfremd ist, so ist nach (87)

$$B(m) = \sum_\rho c_\rho\, a(n_\rho m, Q)$$

und für diese $B(m)$ gilt also bei $(m_1 m_2, n_1 \cdot n_2 \ldots n_\kappa) = 1$

$$B(m_1) \cdot B(m_2) = \sum_{d \mid m_1, m_2} B\left(\frac{m_1 m_2}{d^2}\right) \cdot \varepsilon(d) \cdot d^{k-1}.$$

Das obige Verfahren zur Berechnung von $\mathsf{B}(\tau)$ lässt sich fast wörtlich auf die Berechnung der reduzierten Matrix $\tilde{\mathsf{B}}(\tau)$ übertragen, nur ist hier die obere Schranke der Gliederanzahl, bis zu der man rechnen muss, im allgemeinen erheblich höher als die früher angegebene Zahl K. Denn jene Schranke ist nach Satz 1 im wesentlichen die Anzahl der Nullstellen der betr. Modulform; diese gehört dann aber nicht mehr zu $\Gamma_0(N)$, sondern zu einer kleineren Gruppe von wesentlich grösserem Index in $\Gamma(1)$.

Das nächste Problem ist die Untersuchung der kanonischen Produkte, welche zur Darstellung eines $\varphi(s, Q)$ oder $\tilde{\varphi}(s, Q)$ nötig sind, auf ihre Abhängigkeit von der Form Q, wobei wir die in der Einleitung auseinandergetzten Verhältnisse bei binären Formen als Beispiele vor Augen haben. Welche Formenklassen Q definieren Dirichlet-Reihen $\varphi(s, Q)$, deren lineare Schar abgeschlossen ist, durch die man also auch umgekehrt alle hier auftretenden kanonischen Produkte linear ausdrücken kann? Eine vollständige Antwort auf diese Frage ist aus den in der Einleitung dargelegten Gründen noch nicht möglich. Die ersten Schritte zur Klärung der hier vorliegenden Verhältnisse sollen in den nächsten §§ unternommen werden, wo der Fall der Primzahlstufe $N = q$ genauer diskutiert werden wird.

§ 7. Quadratische Formen mit Diskriminante 1.

Wir untersuchen zunächst die quadratischen Formen mit der Diskriminante 1, wobei wir der systematischen Darstellung halber auch einige schon in den Arbeiten von Herrn Schoeneberg[1] und Petersson[2] bewiesenen Ergebnisse nochmals formulieren.

Die Zahl f der Variabeln einer solchen Form Q ist notwendig durch 8 teilbar. Denn $\vartheta(\tau, Q)$ hat nach Satz 34 die Stufe 1, und da also $\vartheta \,|\, T = \vartheta$ sein muss, so folgt aus der Gl. (85) mit $N = 1$

$$(-i)^{\frac{f}{2}} = 1, \quad f \equiv 0 \pmod 8).$$

Zu jedem solchen f gibt es aber auch tatsächlich eine quadratische Form mit der Diskriminante 1. Für $f = 8$ ist es die Form

$$\begin{aligned} Q_8 = {} & x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3^2 + 2\,x_4^2 + 20\,x_5^2 + 12\,x_6^2 + 4\,x_7^2 + 2\,x_8^2 \\ & + x_1 x_2 + x_2 x_3 + 3\,x_3 x_4 + 5\,x_4 x_5 + 3\,x_5 x_6 + x_6 x_7 + x_7 x_8 \end{aligned}$$

oder nach Korkine und Zolotareff auch

$$Q_8 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{8} x_r^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{r=1}^{8} x_r \right)^2 - x_1 x_2 - x_2 x_8 . \tag{90}$$

Die Potenzen $\vartheta^l(\tau, Q_8)$ sind dann offenbar die Thetareihen zu Formen in $8\,l$ Variabeln mit Diskr. 1.

Sei allgemein Q_{8l} eine quadratische Form in $8\,l$ Variabeln

[1] Siehe oben S. 71, Note 1.
[2] Siehe oben S. 48, Note 1.

mit Diskr. 1. Die durch Addition einer Eisenstein-Reihe entstehende Spitzenform zu $\vartheta(\tau, Q_{8l})$ ist

$$\vartheta(\tau, Q_{8l}) - \frac{1}{\rho_{4l}} G_{4l}(\tau) = \vartheta(\tau, Q_{8l}) - 1 - \frac{1}{\rho_{4l}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{4l-1}(n)\, z^n.$$

Nach Satz 6 ist diese Spitzenform 1. Stufe identisch Null, solange $4l < 12$ d. h. für $l = 1, 2$. Daher sind die Darstellungszahlen $a(n, Q_{8l})$ für $l = 1, 2$

$$\text{(91)} \qquad \begin{cases} a(n, Q_8) = 240\,\sigma_3(n) \\ a(n, Q_{16}) = 480\,\sigma_7(n) \end{cases}$$

elementar durch die Summe der $(4l - 1)$-ten Teilerpotenzen von n ausdrückbar. Die entsprechende Formel für 24 Variable ist sicher nicht richtig, weil $\frac{1}{\rho_{12}}$ keine ganze Zahl ist.

Für 8 und 16 Variable schliesst man aus Gl. (91), dass es nur je eine Thetareihe zu Formen mit Diskr. 1 geben kann. Bei 8 Variabeln hat nun vor kurzem Herr Mordell[1] bewiesen, dass zur Diskr. 1 auch die Klassenzahl quadratischer Formen gleich 1 ist. Bei 16 Variabeln gibt es aber, wie mir Herr E. Witt (Hamburg) mitteilte, mehr als eine Formenklasse mit Diskr. 1. Die Formen aus verschiedenen Klassen haben nach (91) zwar dieselben Darstellungszahlen, unterscheiden sich aber in ihren Automorphismen-Gruppen.

Zur Dimension -12 gibt es bekanntlich eine einzige Spitzenform 1. Stufe, die Diskriminante aus der Theorie der elliptischen Funktionen:

$$\text{(92)} \qquad \Delta(\tau) = c\,(g_2^3 - 27\,g_3^2) = z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, z^n.$$

[1] L. J. Mordell, The definite quadratic forms in eight Variables with determinant unity, Liouville Journal de Math. XVII (1938).

Für jede Form Q_{24} gilt also

$$a(n, Q_{24}) = \frac{1}{\rho_{12}} \sigma_{11}(n) + c \cdot \tau(n) \qquad (n = 1, 2, \ldots .)$$

mit konstantem $c \neq 0$. Aus der allgemeinen Theorie von Herrn SIEGEL folgt nun, dass es zwei Formen Q_{24} mit Diskr. 1 geben muss, deren Thetareihen linear unabhängig sind. Daher sind $\Delta(\tau)$ und G_{12} linear äquivalent mit diesen beiden $\vartheta(\tau, Q_{24})$. Aus $\Delta(\tau)$ und $\vartheta(\tau, Q_8)$ lassen sich aber offenbar alle Modulformen eines Typus $(-4l, 1, 1)$ als Polynom darstellen, d. h. alle Modulformen dieses Typus sind linear durch Thetareihen $\vartheta(\tau, Q_{8l})$ darstellbar. Mithin gilt

Satz 44: Das System aller $\vartheta(\tau, Q_{8l})$ der Stufe 1 mit festem l ist abgeschlossen. Jede Dirichlet-Reihe $\varphi(s, Q_{8l})$ ist eindeutig als Summe in folgender Form

$$\varphi(s, Q_{8l}) = \sum_{(n)}{}' Q_{8l}(n)^{-s} = \frac{1}{\rho_{4l}} \zeta(s) \cdot \zeta(s - 4l + 1) + \sum_{\rho=1}^{\mu}{}' c_\rho \varphi_\rho(s)$$

mit konstanten c_ρ darstellbar. Die $\varphi_\rho(s)$ sind Dirichlet-Reihen mit kanonischem Euler-Produkt, welche zu Spitzenformen 1. Stufe gehören. Ihre Anzahl μ ist

$$\mu = \left[\frac{4l}{12}\right] = \left[\frac{l}{3}\right].$$

(Die Menge der φ_ρ hängt nur von der Zahl l ab). Die Koeffizienten in den $\varphi_\rho(s)$ sind total reelle algebraische Zahlen in einen Körper des Grades $\leqq \mu$.

Wir heben auch ausdrücklich die teilweise Umkehrung hervor:

Satz 45: Die in Satz 44 erwähnten Dirichlet-Reihen lassen sich umgekehrt auch als lineare Kombination mit konstanten C darstellen:

$$\varphi_\rho(s) = \sum_{\sigma=1}^{\mu+1} C_{\rho\sigma}\varphi\left(s, Q_{8l}^{(\sigma)}\right); \quad \zeta(s)\cdot\zeta(s-4l+1) = \sum_{\sigma=1}^{\mu+1} C_\sigma\cdot\varphi\left(s, Q_{8l}^{(\sigma)}\right),$$

dabei sind die $Q_{8l}^{(\sigma)}$ gewisse $\mu+1$ quadratische Formen mit Diskr. 1.

Mit Hilfe der Kugelfunktionen P_ν kann man nun nach § 6 noch in anderer Weise Spitzenformen konstruieren. Wir bilden mit einer zu Q_8 aus (90) gehörigen Kugelfunktion $P_\nu(x_1, \ldots x_8) = P_\nu(x)$ die Spitzenform 1. Stufe

$$(93) \qquad \vartheta(\tau, P_\nu, Q_8) = \sum_{(n)} P_\nu(n)\, z^{Q_8(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_\nu(n)\cdot z^n.$$

Sie hat die Dimension $-(4+\nu)$ und daher ist

$$(94) \qquad B_\nu(n) = \sum_{Q(x)=n} P_\nu(x_1 \ldots x_8) \text{ gleich } 0 \text{ für } 1 \leqq \nu < 8.$$

Ebenso kann es, abgesehen von konstanten Faktoren, nur je höchstens eine nicht identisch verschwindende Reihe (93) für die graden ν mit $8 \leqq \nu \leqq 18$ geben, wie auch die P_ν unter den Kugelfunktionen der betr. Ordnung gewählt sein mögen. Wir wollen zeigen

Satz 46: Für $\nu = 8$ kann man P_8 so wählen, dass

$$\vartheta(\tau, P_8, Q_8) = \Delta(\tau).$$

Zum Beweise stellen wir nach § 5 ein P_ν durch das Polynom $H_\nu(u)$ mit 8 willkürlichen reellen Parametern (α) dar:

$$(95) \qquad P_\nu(x) = H_\nu(u)\cdot\left(Q(\alpha)\cdot Q(x)\right)^{\frac{\nu}{2}} \text{ mit}$$

$$(96)\begin{cases} u = \dfrac{A(x,\alpha)}{2\sqrt{Q(x)\cdot Q(\alpha)}}, \quad A(x,\alpha) = \sum\limits_{r,s=1}^{8} a_{rs}\, x_r\, \alpha_s, \\ Q(x) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{r,s=1}^{8} a_{rs}\, x_r\, x_s. \end{cases}$$

Wählen wir den Koeffizienten von u^ν in $H_\nu(u)$ gleich 1, so können wir setzen

$$(97) \qquad H_\nu(u) = u^\nu + \sum_{\rho=1}^{\nu-1} H_\rho(u)\, c_{\rho\nu} - \omega_\nu$$

mit konstanten $c_{\rho\nu}, \omega_\nu$. Denn die Polynome $H_\rho(u)$ mit $\rho = 0, 1, \ldots \nu$ sind $\nu + 1$ linear unabhängige Polynome vom Grade $\leqq \nu$. In (97) bestimmt sich ω_ν aus der Orthogonalitäts-Bedingung (78)

$$\int_{-1}^{+1} (u^\nu - \omega_\nu)(1-u^2)^{\frac{5}{2}}\, du = 0, \quad \omega_\nu = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\cdot\Gamma(4)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+4\right)}.$$

Nach (93) ist mit P_ν aus (95)

$$B_\nu(n) = \left(Q_8(\alpha)\cdot n\right)^{\frac{\nu}{2}} \sum_{Q_8(x)=n} H_\nu(u).$$

Hierbei steht u zur Abkürzung wie in (96), und die Summe ist über alle ganzen Lösungen (x) von $Q_8(x) = n$ zu erstrecken. Nach (94) ist daher auch für $\nu \leqq 8$

$$(98)\begin{cases} B_\nu(n) = \left(Q_8(\alpha)\cdot n\right)^{\frac{\nu}{2}} \sum\limits_{Q_8(x)=n} (u^\nu - \omega_\nu) \\ = \dfrac{1}{2^\nu}\sum\limits_{Q_8(x)=n} A^\nu(x,\alpha) - \omega_\nu\, Q_8(\alpha)^{\frac{\nu}{2}}\cdot n^{\frac{\nu}{2}}\cdot a(n, Q_8) \quad (\nu \leqq 8). \end{cases}$$

Für das bisher willkürliche (α) setzen wir nun eine ganzzahlige Lösung von

$$Q_8(\alpha) = 1$$

und zeigen für $B_8(n)$, welches mit diesem $P_8(x)$ gebildet ist,

$$B_8(1) \neq 0.$$

Diese Ungleichung folgt einfach aus der Tatsache, dass in dem Ausdruck

$$2^8 \cdot B_8(1) = \sum_{Q_8(x)=1} A^8(x,\alpha) - 2^8 \cdot 240 \cdot \omega_8 = \sum A^8(x,\alpha) - 2^5 \cdot 15$$

die Summe

$$\sum_{Q_8(x)=1} A^8(x,\alpha) \geqq A^8(\alpha,\alpha) + A^8(-\alpha,\alpha) = 2 \cdot 2^8 = 2^5 \cdot 16,$$

daher

$$2^8 B_8(1) \geqq 2^5(16-15) = 2^5.$$

Wir berechnen noch den numerischen Wert von $B_8(1)$, der sich wie auch alle $B_8(n)$ als unabhängig von der speziellen Wahl der (α) unter den 240 Lösungen von $Q_8(\alpha) = 1$ erweist. Da bekanntlich für alle reellen $(x), (\alpha)$

$$|A(x,\alpha)| \leqq 2\sqrt{Q_8(x)\,Q_8(\alpha)},$$

so sind für die Summanden $|A(x,\alpha)|$ in $B_8(1)$ nur die Werte $0, 1, 2$ möglich. Aus $B_\nu(1) = 0$ für $\nu = 4$ und 6 folgt dann elementar, dass in der Summe für $B_8(1)$

$$\begin{aligned} |A(x,\alpha)| &= 2 \text{ für genau 2 Systeme } (x), \\ |A(x,\alpha)| &= 1 \text{ für genau 112 Systeme } (x), \\ |A(x,\alpha)| &= 0 \text{ für genau 126 Systeme } (x) \end{aligned}$$

vorkommt. Mithin ist

$$\sum A^8(x,\alpha) = 2^9 + 112, \quad B_8(1) = \frac{9}{16}.$$

Damit ist dann folgender arithmetische Satz über die ganzzahligen Lösungen von $Q_8(x) = n$ bewiesen:

Satz 47: Mit Hilfe einer ganzzahligen Lösung (α) von $Q_8(\alpha) = 1$ bilde man durch Summation über alle ganzen Lösungen (x) von $Q_8(x) = n$

$$\tau(n) = \frac{1}{144}\left(\sum_{Q_8(x)=n} A^8(x,\alpha) - 480 \cdot n^4 \cdot \sigma_3(n)\right)$$

in der Bezeichnung (92), (96). Diese $\tau(n)$ sind ganze Zahlen $\big(\tau(1) = 1\big)$ mit der Multiplikationsregel

$$\tau(n) \cdot \tau(m) = \sum_{d\,|\,n,m} \tau\left(\frac{nm}{d^2}\right) \cdot d^{11}.$$

Ramanujan[1] hat über die Koeffizienten $\tau(p)$ die Vermutung ausgesprochen, dass das Polynom, welches in dem kanonischen Euler-Produkt für $\sum \tau(n)\, n^{-s}$ bei der Primzahl p auftritt,

$$1 - \tau(p)\, x + p^{11} \cdot x^2$$

keine reellen Wurzeln besitzt, d. h. dass $|\tau(p)| < 2p^{\frac{11}{2}}$. Über die Richtigkeit dieser Vermutung ist heute noch nichts entschieden.[2]

§ 8. Quadratische Formen von Primzahlstufe q und quadratischer Diskriminante (Haupttypus).

Es sei jetzt q eine feste ungrade Primzahl. Wenn die quadratische Form Q in f Variabeln zum Haupttypus

[1] Ramanujan, On certain arithmetical functions, Transact. of the Cambridge Philos. Soc. 22, No. IX, 1916.

[2] R. A. Rankin, Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions II. Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol. 35, part 3, 1939.

$\left(-\frac{f}{2}, q, 1\right)$ gehört, so ist ihre Diskriminante nach Definition (82) ein Quadrat $\left(\text{also } \frac{f}{2} \text{ grade}\right)$ und muss nach Satz 29 eine Potenz q^{2l} von q sein mit $2l \leqq f$. Wir setzen

$$\frac{f}{2} = k = \text{grade Zahl}, \quad \text{Diskr.}\, Q = q^{2l}, \quad 1 \leqq l \leqq k.$$

Die Adjungierte Q^* hat nach § 4 die Diskr. q^{2k-2l} und ist eine primitive Form. Der Fall $l = k$ kann nicht bei primitiven Formen Q vorkommen, denn sonst wäre $Q^{**} = Q$ und hätte wie Q^* die Diskr. 1. Die imprimitive Form Q hat dann die Gestalt $q \cdot Q_1$, wo Q_1 eine Form von der im vorigen § behandelten Art mit Diskr. 1 ist. Wir setzen also voraus, dass

$$Q \text{ primitiv}, \quad 1 \leqq l \leqq k-1.$$

Nach (85) gilt die Grundformel

$$\frac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, Q\right)}{(-i\tau)^k} = \frac{1}{q^l}\vartheta\left(\frac{\tau}{q}, Q^*\right) \text{ oder auch } \vartheta(\tau, Q) \mid H = \frac{i^k}{q^l}\vartheta(\tau, Q^*),$$

$$\vartheta(\tau, Q) \mid L = \vartheta(\tau, Q), \text{ wenn } L \subset \Gamma_0(q).$$

Wir bestimmen diejenige Eisenstein-Reihe $E(\tau)$ zu $\vartheta(\tau, Q)$, sodass

$$\vartheta(\tau, Q) = E(\tau) + \text{Spitzenform}$$

wird. Dieses $E(\tau)$ ist nach Satz 11 eine lineare Kombination

$$E(\tau) = \alpha\, G_k(\tau) + \beta\, G_k(q\tau), \tag{99}$$

wo α, β so bestimmt werden müssen, dass $\vartheta - E$ an den beiden Spitzen $\tau = \infty$ und $\tau = 0$ des Fundamentalbereiches von $\Gamma_0(q)$ eine Potenzreihe mit dem konstanten Gliede 0 ist. Bei $\tau = \infty$ folgt

$$(\alpha + \beta)\,\rho_k = 1$$

und aus (27) erhält man die Entwickelung an der Spitze $\tau_1 = -\frac{1}{\tau} = 0$

$$\vartheta(\tau, Q) \mid T = \frac{i^k}{q^l} + \text{Gliedern mit } z_q$$

$$E(\tau) \mid T = \left(\alpha + \beta q^{-k}\right) \rho_k + \text{Gliedern mit } z_q$$

$$\left(\alpha + \beta q^{-k}\right) \rho_k = i^k - q^{-l}$$

$$(100) \qquad \alpha = \frac{i^k}{\rho_k} \frac{q^{k-l} - i^k}{q^k - 1}, \qquad \beta = \frac{1}{\rho_k} \frac{q^k - i^k q^{k-l}}{q^k - 1}$$

Damit ist (auch für $k = 2$)

$$(101) \qquad \vartheta(\tau, Q) - \left(\alpha G_k(\tau) + \beta G_k(q\tau)\right)$$

eine Spitzenform vom gleichen Typus $(-k, q, 1)$.

Die Anwendung des allgemeinen Satzes 23 ergibt dann

Satz 48: Die reduzierte Dirichlet-Reihe $\tilde{\varphi}(s, Q)$ einer quadratischen Form Q vom Haupttypus ist eindeutig als lineare Kombination von höchstens $1 + x(k)$ kanonischen Eulerprodukten darstellbar:

$$\tilde{\varphi}(s, Q) = \alpha \cdot L(s, \chi_0) \cdot L(s - k + 1, \chi_0) + \sum_{\rho=1}^{x(k)} c_\rho \cdot \tilde{\varphi}_\rho(s).$$

Die c_ρ sind Konstante, χ_0 ist der Hauptcharakter mod q, also $L(s, \chi_0) = (1 - q^{-s})\,\zeta(s)$ und die $\tilde{\varphi}_\rho(s)$ sind die linear unabhängigen kanonischen Euler-Produkte zu Spitzenformen vom Teiler 1. Die Gesamtheit der $\tilde{\varphi}_\rho(s)$ ist völlig bestimmt allein durch den Typus der Form Q.

Für die Darstellungszahlen $a(n, Q)$ bedeutet das:

$$a(n, Q) = \alpha \cdot \sigma_{k-1}(n) + \sum_{\rho=1}^{x(k)} c_\rho \lambda_\rho(n), \quad \left((n, q) = 1\right),$$

wo die $\lambda_\rho(n)$ reelle algebraische Zahlen sind mit der Multiplikationsregel

$$\lambda_\rho(n_1)\cdot\lambda_\rho(n_2) = \sum_{d \mid n_1, n_2} \lambda_\rho\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{d^2}\right) d^{k-1}.$$

Als Koeffizienten von Spitzenformen haben die $\lambda_\rho(n)$ asymptotisch geringere Grössenordnung als das Hauptglied $\sigma_{k-1}(n)$. Die elementare Abschätzung

$$\lambda_\rho(n) = O\left(n^{\frac{k}{2}}\right) \text{ für } n \to \infty$$

ist neuerdings[1] zu

$$\lambda_\rho(n) = O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{5}}\right)$$

verschärft worden.

Wenn die Matrix $\mathsf{B}(\tau)$, welche nach (50) zum vollen System der Modulformen vom Typus $(-k, q, 1)$ gehört, mit einer Diagonalmatrix äquivalent ist, so gilt ein zu 48 analoger Satz auch für die vollständige Reihe $\varphi(s, Q)$. Das ist nach den Sätzen von Herrn Petersson der Fall für alle Werte $k \leqq 22$ und für $k = 26$. Denn dann ist keine oder nur eine Spitzenform zur ersten Stufe vorhanden, und letztere hat rationale Koeffizienten. Infolgedessen kann hier nicht der Ausnahmefall des erwähnten Theorems (Gl. (59)) vorliegen, dass bei der Stufe 1

$$\lambda_\rho^2(q) = 4q^{k-1}.$$

Bei $k = 24$ gibt es zwei Spitzenformen 1. Stufe, und die numerische Rechnung zeigt, wie ich am Schluss in $(T_n I)$ erwähnt habe, dass die Koeffizienten der kanonischen

[1] Siehe oben S. 89, Note 2.

Euler-Produkte hier dem reellen Körper $K\left(\sqrt{144169}\right)$ angehören. Daher kann die kritische Bedingung des genannten Theorems

$$\lambda_\rho^2(q) = 4\,q^{23}$$

höchstens für die Primzahl $q = 144169$ erfüllt sein. Es ist also gezeigt

Satz 49: Für jede quadratische Form Q vom Typus $(-k, q, 1)$, deren — notwendig durch 4 teilbare — Variabelnzahl $2k \geqq 4$ und $\leqq 52$ ist (ausgenommen höchstens $2k = 48$ mit $q = 144169$) besitzt auch die vollständige Dirichlet-Reihe $\varphi(s, Q)$ eine eindeutig bestimmte Darstellung als lineare Kombination von kanonischen Euler-Produkten vom Teiler q

$$\varphi(s, Q) = \left(\alpha + \beta q^{-s}\right)\zeta(s)\cdot\zeta(s-k+1) + \sum_{\rho=1}^{x(k)+e(k)} c_\rho \varphi_\rho(s).$$

Das erste Glied rechts ist durch die Umformung

$$\alpha + \beta q^{-s} = a_0\left(1 - q^{-s}\right) + a_1\left(1 - q^{k-1-s}\right)$$

ebenfalls eine Kombination von kanonischen Euler-Produkten

$$(102)\qquad a_0 L(s, \chi_0)\cdot\zeta(s-k+1) + a_1\zeta(s)\cdot L(s-k+1, \chi_0)$$

($a_0 = 0$ für $k = 2$, sonst $a_0\cdot a_1 \neq 0$).

Der Zusammenhang zwischen der Reihe $\varphi(s, Q)$ und ihrer reduzierten $\tilde{\varphi}(s, Q)$ kann nun aber in jedem Fall übersichtlich dargestellt werden, wobei sich ein bemerkenswert einfaches und neues arithmetisches Resultat ergibt. Hierzu leiten wir durch den Operator W aus ϑ oder besser gleich aus einer beliebigen Funktion $F(\tau)$ vom Typus $(-k, q, 1)$ eine Funktion der 1. Stufe her: Ist

$$F(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a(m) z^m, \quad F \mid T = \sum_{m=0}^{\infty} b(m) z_q^m$$

so ist nach (34)

$$F \mid (W+1) = F + F \mid W = \sum_{m=0}^{\infty} \big(a(m) + q b(mq)\big) z^m$$

eine Funktion bereits der Stufe 1, während nach Satz 25

$$F_1 = F \mid H = \frac{F\left(-\frac{1}{q\tau}\right)}{q^k \tau^k} = F \mid T \cdot \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty} b(m) z^m$$

wieder vom Typus $(-k, q, 1)$ ist. Nimmt man nun F_1 an Stelle von F, so wird auch

$$F_1 + F_1 \mid W = \sum_{m=0}^{\infty} \big(b(m) + q^{1-k} a(mq)\big) z^m$$

eine Funktion der Stufe 1. Wählen wir nun für $F(\tau)$ die Reihe $\vartheta(\tau, Q)$, so folgt

Satz 50: Für die Darstellungszahlen $a(m, Q)$ und $a(m, Q^*)$ einer Form Q vom Typus $(-k, q, 1)$ und ihrer Adjungierten gilt:

$$(103)\left\{\begin{aligned} & q^{l-1} a(m, Q) + i^k a(mq, Q^*) \\ & = \frac{1}{\rho_k} \left(q^{l-1} + i^k\right) \sigma_{k-1}(m) + c(m) \\ & q^{k-l-1} a(m, Q^*) + i^k a(mq, Q) \\ & = \frac{1}{\rho_k} \left(q^{k-l-1} + i^k\right) \sigma_{k-1}(m) + c'(m) \end{aligned}\right\} m = 0, 1, 2, \ldots$$

Hierbei sind die $c(m)$, $c'(m)$ die Koeffizienten je einer Spitzenform der 1. Stufe, welche als solche von nur $e(k) = \left[\frac{k}{12}\right]$

Parametern linear abhängen. Die Zahlen $\rho_k = \frac{\zeta(k)\cdot\Gamma(k)}{(2\pi i)^k}$ sind aus der Tabelle in § 2, (39) zu entnehmen.

Besonders einfach werden diese Aussagen für die 6 Werte $k = 2, 4, 6, 8, 10, 14$, wo es überhaupt keine Spitzenformen 1. Stufe gibt. Hier sind also die $c(m)$, $c'(m)$ alle gleich 0, und die Zahlen ρ_k^{-1} sind ganze Zahlen. Dagegen

Satz 51: Für jede Form Q von 24 Variabeln mit der Diskriminante q^{2l} und der Stufe q ist

$$(104)\quad \left\{\begin{aligned} & q^{l-1}\, a(m, Q) + a(mq, Q^*) \\ & = \left(1 + q^{l-1}\right)\cdot\frac{65520}{691}\cdot\sigma_{11}(m) + a_1\tau(m) \\ & q^{11-l}\, a(m, Q^*) + a(mq, Q) \\ & = \left(1 + q^{11-l}\right)\cdot\frac{65520}{691}\cdot\sigma_{11}(m) + a_2\tau(m). \end{aligned}\right.$$

Die Zahlen $\tau(m)$ sind die (ganzzahligen) Koeffizienten der Funktion $\Delta(\tau)$, welche nach § 7 mit den quadratischen Formen von 8 und 24 Variabeln mit Diskr. 1 zusammenhängen. Die Konstanten a_1, a_2, welche nur von Q abhängen, sind im allgemeinen von 0 verschieden, weil die rechte Seite in (104) ganz sein muss.

Drückt man die $c(m)$ in (103) durch die Koeffizienten der kanonischen Euler-Produkte der 1. Stufe aus, so kann man durch eine explizite Formel die Darstellungszahlen $a(nq^r, Q)$ auf $a(n, Q)$ und $a(n, Q^*)$ mit $(n, q) = 1$ zurückführen. Es mag hier genügen, auf diese Möglichkeit hinzuweisen.

Für quaternäre Formen ($k = 2$) sind die rechten Seiten in (103) stets gleich 0. Diese Formeln lassen sich auch rein arithmetisch ohne Schwierigkeit beweisen, während für höhere Variabelnzahlen ein solcher Beweis mit den heutigen Mitteln noch nicht möglich zu sein scheint.

Eine bemerkenswerte Beziehung der Formeln (103) zu der Klassenzahl des imaginär-quadratischen Körpers $K(\sqrt{-q})$ mit der Diskr. $-q$ oder $-4q$ folgt endlich noch aus einem Satz der Funktionentheorie, den ich an anderer Stelle[1] bewiesen habe. Wir setzen voraus, dass $k \leq 14$, $k \neq 12$, sodass die Gl. (103) mit $c(m) = 0$ anwendbar ist. Hier habe ich für die Zahlen $\lambda_p(q)$ der kanonischen Euler-Produkte der Stufe q bewiesen, dass sie nur die Werte $\pm q^{\frac{k}{2}-1}$ haben. Und zwar ist der Anzahl-Überschuss der positiven über die negativen gleich

$$(104) \qquad (-1)^{\frac{k}{2}-1} \cdot h \cdot \omega_q .$$

Dabei bedeutet $h = h(\sqrt{-q})$ die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{-q})$ und ω_q ist $1, 2$ oder $\frac{1}{2}$, je nachdem das Zerfällungssymbol der Primzahl 2 für diesen Körper gleich 1, -1 oder 0 ist. (Bei $k = 2$ ist jene Anzahl noch um 1 grösser als der Ausdruck (104)). Nach Satz 49 hängen nun die $\lambda_p(q)$ mit den Darstellungen der Zahl q durch die quadratischen Formen Q des betr. Typus zusammen und diese nach (103) mit den Darstellungen der Zahl 1. Für die allgemeinen Werte von k lässt sich mit Benutzung des Satzes 17 von Herrn Petersson eine ähnliche Aussage beweisen, die aber komplizierter formuliert werden muss.

Bei der Zurückführung der Reihen $\varphi(s, Q)$ oder $\tilde{\varphi}(s, Q)$ auf die kanonischen Euler-Produkte ist das erste wichtige Problem der allgemeinen Theorie, zu entscheiden, wieviel

[1] E. Hecke, Die Klassenzahl imaginär-quadratischer Körper in der Theorie der ellipt. Modulfunkt. Monatshefte für Math. und Physik, 48, 1939.

bezw. welche der kanonischen Produkte zur Darstellung der $\varphi(s, Q)$ mit Q von fester Diskr. q^{2l} notwendig sind und insbesondere, ob jene auch umgekehrt durch die $\varphi(s, Q)$ von Q mit fester Diskr. darstellbar sind, d. h. es muss untersucht werden, ob das System dieser $\varphi(s, Q)$ ein abgeschlossenes System im Sinne von § 3 ist. Hier ergibt sich nun eine wichtige negative Antwort schon bei der Betrachtung der Gl. (102). Abgesehen von den quaternären Formen ($k = 2$), wo es nur eine einzige Eisenstein-Reihe gibt, sind nämlich nach (102) bei allen $\varphi(s, Q)$ mindestens die beiden kanonischen Produkte

$$L(s, \chi_0) \cdot \zeta(s-k+1) \text{ und } \zeta(s) \cdot L(s-k+1, \chi_0)$$

erforderlich. Aber diese treten nach (102) bei allen Formen Q mit derselben Diskriminante in der gleichen Linear-Kombination auf und können daher einzeln nicht durch diese $\varphi(s, Q)$ allein ausgedrückt werden. D. h.

Satz 52: Die Dirichlet-Reihen zu quadratischen Formen vom Typus $(-k, q, 1)$ mit derselben Diskr. q^{2l} bilden kein abgeschlossenes System, wenn die Zahl $2k$ der Variabeln grösser als 4 ist.

Daher ist also zur Aufstellung der kanonischen Produkte in der additiven Zerlegung eines solchen $\varphi(s, Q)$ stets die gleichzeitige Heranziehung von quadratischen Formen Q mit mehreren verschiedenen Diskriminanten notwendig, die aber alle denselben Typus haben. Natürlich lassen sich aber alle erforderlichen kanonischen Produkte auch stets aus einer einzigen $\vartheta(\tau, Q)$ mit Hilfe der Operatoren T_m erzeugen.

§ 9. Quaternäre Formen von Primzahlstufe und Haupttypus.

Die quaternären Formen vom Typus $(-2, q, 1)$ nehmen in vieler Hinsicht eine Sonderstellung ein. Arithmetisch sind sie dadurch ausgezeichnet, dass hier durch den Typus auch bereits die Diskriminante eindeutig fixiert ist, denn nach Satz 29 ist ihre Diskr. $= q^2$. Für die Funktionentheorie der Gruppe $\Gamma_0(q)$ haben sie eine besondere Bedeutung, indem aus Spitzenformen dieses Typus durch Integration die p_0 Integrale 1. Gattung zur Gruppe $\Gamma_0(q)$ entstehen.

Die Arithmetik dieser quaternären Formen ist bereits soweit ausgebildet, dass die Multiplikationsgesetze für die Darstellungszahlen, welche aus meiner allgemeinen Theorie folgen, auch rein arithmetisch in befriedigender Weise formuliert werden können und nun auch in einer eben veröffentlichten Arbeit von Herrn H. Brandt[1] arithmetisch bewiesen sind.

Der Zusammenhang zwischen der Arithmetik und meinen Sätzen wird auf folgende Weise hergestellt:

In die Theorie der quaternären komponierbaren Formen ist von Herrn Brandt[2] ein quadratisches Anordnungsschema für die Formen mit gegebener Diskr. eingeführt worden, das er »Kompositionstafel« nennt. Es ist auf folgende Weise gebildet: Die Anzahl der Zeilen und der Spalten dieser Tabelle ist die Anzahl der Idealklassen in gewissen Quaternionen-Körpern, deren Normenformen eben jene quadratischen Formen sind, welche wir als vom Typus $(-2, N, 1)$ bezeichnen. Ihre Anzahl bei festem N heisse w. (Wir beschränken uns gleich auf den Fall der Primzahlstufe q).

[1] H. Brandt, Math. Ann. 117 (1940).

[2] H. Brandt, Idealtheorie in Quaternionenalgebren, Math. Ann. 99 (1928).

Diese Zahl w ist kürzlich von Herrn M. EICHLER[1] bestimmt worden, wobei für $N = q$ sich herausstellt, dass

$$(105) \qquad w = 1 + p_0(q) = 1 + x(2),$$

d. h. gleich der Anzahl aller Modulformen vom Typus $(-2, q, 1)$ ist. In der Diagonale jener Tabelle stehen als Elemente alle diejenigen Formenklassen der Diskr. q^2, repräsentiert etwa durch die Formen $Q_{11}, Q_{22}, \ldots\, Q_{w,w}$, welche die Zahl 1 darstellen, und es sei

$$(106) \qquad 1 \leqq e_\sigma = a(1, Q_{\sigma\sigma}), \quad (\sigma = 1, 2, \ldots\, w)$$

die Anzahl der Eins-Darstellungen. Dieselbe Form Q kann dabei möglicher Weise auch mehrmals vorkommen. Ausserhalb der Diagonale stehen Repräsentanten aller übrigen Formenklassen dieser Diskr., die wir entsprechend ihrer Stellung in der Tabelle als $Q_{\rho\sigma}$ $(\rho, \sigma = 1, \ldots\, w)$ bezeichnen, wobei $Q_{\rho\sigma} = Q_{\sigma\rho}$ sein muss und im übrigen wieder dieselbe Form auch mehrmals vorkommen kann. Die genaue Vorschrift dieser Verteilung ist arithmetischer Natur und ihre Kenntnis ist für unsere Theorie nicht erforderlich. Mit Hilfe dieser symmetrischen quadratischen Tabelle bilden wir uns nun eine quadratischen Matrix des Grades w, deren Elemente die Dirichlet-Reihen

$$\frac{1}{e_\sigma} \varphi(s, Q_{\rho\sigma}) = \frac{1}{e_\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} a(m, Q_{\rho\sigma})\, m^{-s}$$

sind und bezeichnen diese Matrix mit $\Phi(s)$. Schreiben wir sie selbst als Dirichlet-Reihe

[1] M. EICHLER, Über die Idealklassenzahl total definiter Quaternionenalgebren, Math. Zeitschr. 43 (1937).

$$(107) \qquad \Phi(s) = \left(\frac{1}{e_\sigma}\varphi(s, Q_{\rho\sigma})\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda(m) \cdot m^{-s}$$

so sind die Koeffizienten $\lambda(m)$ Matrizen, welche aus den Darstellungszahlen von m durch das System der Formen $Q_{\rho\sigma}$ gebildet sind

$$(108) \qquad \lambda(m) = (\lambda_{\rho\sigma}(m)) = \left(\frac{1}{e_\sigma} a(m, Q_{\rho\sigma})\right).$$

Nach Konstruktion ist $\lambda(1)$ die Einheitsmatrix E des Grades w. Ich stelle nun folgenden Satz auf:

Satz 53: 1) Die Matrizen $\lambda(m) = \left(\frac{1}{e_\sigma} a(m, Q_{\rho\sigma})\right)$ sind alle mit einander vertauschbar und es ist

$$\lambda(m_1) \cdot \lambda(m_2) = \sum_{d | m_1, m_2} \lambda\left(\frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}\right) \cdot \chi_0(d) \cdot d$$

$$(\chi_0(m) = \text{Hauptcharakter mod } q).$$

Die Matrix $\Phi(s)$ lässt sich also als kanonisches Euler-Produkt schreiben.

2) Setzt man $F^\rho = \frac{1}{e_1} \vartheta(\tau, Q_{\rho 1})$ $(\rho = 1, 2 \ldots, w)$, so hängen die $\lambda(m)$ mit den Operatoren T_m^q zur Stufe q durch die Gleichungen

$$F^\rho \,|\, T_m^q = \sum_{\sigma=1}^{w} \lambda_{\rho\sigma}(m) \cdot F^\sigma$$

zusammen.

3) Die w in einer Spalte der Kompositions-Tafel stehenden Formen $Q_{\rho\sigma}$ ergeben stets w linear unabhängige Thetareihen $\vartheta(\tau, Q_{\rho\sigma})$.

Ich habe diesen Satz im Jahre 1935 für alle Primzahlen $q \leqq 37$ mit meiner funktionentheoretischen Methode durch

Ausführung der Rechnung nach § 6 als richtig nachgewiesen. Meine Vermutung, dass der Satz allgemein richtig sei und dass hiermit die abschliessende übersichtliche Aussage über die Darstellung von Zahlen durch das System quaternärer Formen dieses Typus gefunden sei, habe ich dann Herrn Brandt mitgeteilt, in der Hoffnung, dass seine arithmetische Theorie den Beweis liefern könnte. In der Tat ist ihm dann der Beweis der arithmetischen Behauptung 1) gelungen. Herr Brandt[1] veröffentlicht jetzt eine kurze Skizze des Beweises. Dagegen hat man heute noch keinen Beweis der linearen Unabhängigkeit der $F^{\mathfrak{p}}$. Aus diesem würde das wichtige Resultat folgen, dass alle Integrale 1. Gattung zu der Untergruppe $\Gamma_0(q)$ sich durch die vierfachen Thetareihen des Typus $(-2, q, 1)$ darstellen lassen.

Bei dem Brandtschen Beweis wird zunächst arithmetisch gezeigt, dass

$$(109)\qquad \lambda(n_1 \cdot n_2) = \lambda(n_1)\cdot\lambda(n_2), \text{ wenn } (n_1, n_2) = (n_1, q) = (n_2, q) = 1.$$

Die Herleitung der allgemeinen Multiplikationsregel 1) erfordert noch weitere dort nur angedeutete Schlüsse. Es ist bemerkenswert, dass allein von (109) aus der Beweis auch mit den Mitteln nur der Funktionentheorie in folgender Art zu Ende geführt werden kann, wobei gleichzeitig 2) mit bewiesen wird.

Zunächst gehe man von $\Phi(s)$ zu der entsprechenden Matrix der Potenzreihen über, die wieder mit $\mathsf{B}(\tau)$ bezeichnet sei. Für die Matrix $\tilde{\mathsf{B}}(\tau)$ der reduzierten Reihen schliesst man bei jeder Primzahlpotenz p^r mit $p \neq q$, dass

$$(110)\qquad \lambda(p^r)\cdot\tilde{\mathsf{B}}(\tau) - \tilde{\mathsf{B}}(\tau)\cdot\lambda(p^r) = 0$$

und zwar auf Grund des wichtigen Satzes 41 und Hilfssatz

[1] Siehe S. 98, Note 1.

1 in § 9 (T_n II): Wenn in der Potenzreihe einer Modulform der Stufe q kein Glied vorkommt, dessen Exponent zu der festen Primzahl p teilerfremd ist, so ist die Reihe identisch Null. Die linke Seite in (110) erfüllt die Voraussetzungen dieses Satzes wegen (109). Also sind zunächst alle $\lambda(n)$ mit $(n, q) = 1$ mit einander vertauschbar. Wendet man jetzt den Operator T_{p^r} auf die Potenzreihe $\tilde{\mathsf{B}}(\tau)$ an, so entsteht wieder eine Funktion der Stufe q, mit den Koeffizienten

$$C(n) = \sum_{d \mid n, p^r} \lambda\left(\frac{np^r}{d^2}\right) d \quad \left(= \lambda(n) \cdot \lambda(p^r), \text{ wenn } (n, p) = 1\right).$$

Das sind aber nach (109) die Koeffizienten von $\lambda(p^r) \cdot \tilde{\mathsf{B}}(\tau)$, abgesehen von den Werten n, welche durch p teilbar sind. Nach dem eben zitierten Satz ist also

$$\tilde{\mathsf{B}}(\tau) \mid T_{p^r} = \lambda(p^r) \cdot \tilde{\mathsf{B}}(\tau) = \tilde{\mathsf{B}}(\tau) \cdot \lambda(p^r)$$

und nach (109) und Satz 24a auch allgemein

$$\mathsf{B}(\tau) \mid T_n = \lambda(n) \cdot \mathsf{B}(\tau), \text{ wenn } (n, q) = 1.$$

Die Matrizen $\lambda(n)$ setzen sich also bei $(n, q) = 1$ isomorph zu den Operatoren T_n zusammen und daher besteht das Multiplikationsgesetz

$$\lambda(n_1) \cdot \lambda(n_2) = \sum_{d \mid n_1, n_2} \lambda\left(\frac{n_1 \cdot n_2}{d^2}\right) d, \text{ wenn } (n_1, q) = (n_2, q) = 1.$$

Um endlich noch die Beziehung der arithmetisch definierten Matrix $\lambda(q)$ zu dem Operator T_q^q (für die Funktionen q-ter Stufe vom Teiler q und Charakter 1) zu ermitteln, stellen wir zunächst fest, dass nach (58)

$$T_q^q = q \sum_{l \bmod q}{}' \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & q \end{pmatrix} = q \cdot H \cdot W.$$

Aber für die Funktionen $f(\tau)$ vom Typus $(-2, q, 1)$ ist der Operator W gleich -1, weil $f \mid W + f$ zur 1. Stufe gehört und es keine Funktionen der Dimension -2 zur 1. Stufe gibt. Also ist für jedes solche $f(\tau)$

$$f(\tau) \mid T_q^q = -q \cdot f(\tau) \mid H.$$

Nun sind alle T_n bei $(n, q) = 1$ vertauschbar mit T_q^q, also auch mit H. Daher ist für

$$\mathsf{B}(\tau) \mid H = \mathsf{B}^*(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty}{}' \lambda^*(m)\, z^m$$

$$\mathsf{B}^*(\tau) \mid T_n = \lambda(n) \cdot \mathsf{B}^*(\tau) = \mathsf{B}^*(\tau) \cdot \lambda(n), \text{ wenn } (n, q) = 1.$$

Daraus folgt

$$\tilde{\mathsf{B}}^*(\tau) \mid T_n = \lambda(n) \cdot \tilde{\mathsf{B}}^* \text{ und}$$

$$\tilde{\mathsf{B}}^*(\tau) = \lambda^*(1) \sum_{(n,q)=1}{}' \lambda(n) \cdot z_q^n = \lambda^*(1) \cdot \tilde{\mathsf{B}}(\tau) = \tilde{\mathsf{B}}(\tau) \cdot \lambda^*(1).$$

Also haben $\mathsf{B}^*(\tau)$ und $\lambda^*(1) \cdot \mathsf{B}(\tau)$ dieselbe reduzierte Reihe und sind mithin nach Satz 21, 24 a identisch. Die Gleichung

$$\mathsf{B}^* = \lambda^*(1) \cdot \mathsf{B} \text{ bedeutet } \mathsf{B}(\tau) \mid T_q^q = -q \cdot \lambda^*(1) \cdot \mathsf{B}(\tau).$$

Wegen (85) ist

$$\vartheta(\tau, Q_{\rho\sigma}) \mid H = -q^{-1} \cdot \vartheta(\tau, Q_{\rho\sigma}^*)$$

$$\mathsf{B}^*(\tau) = \mathsf{B}(\tau) \mid H = -q^{-1} \left(\frac{1}{e_\sigma} \vartheta(\tau, Q_{\rho\sigma}^*) \right);$$

$$\lambda^*(1) = -q^{-1} \left(\frac{1}{e_\sigma} a(1, Q_{\rho\sigma}^*) \right).$$

$$\mathrm{B}(\tau) \mid T_q^q = \left(\frac{1}{e_\sigma} a\left(1, Q^*_{\sigma\rho}\right)\right) \cdot \mathrm{B}(\tau).$$

Der Faktor von B ist aber in der Tat gleich $\lambda(q)$ aus Satz 53, 1), weil nach Satz 50

$$a(m, Q^*) = a(mq, Q), \text{ für } k = 2, l = 1.$$

Damit sind aus (109) die Behauptungen 1) und 2) bewiesen. Ein allgemeiner Beweis von 3) ist nicht bekannt.

Das Quadrat der Matrix $\lambda(q)$ ist die Einheitsmatrix, weil der Operator $q \cdot H$ die Periode 2 hat. Daher sind die charakteristischen Wurzeln von $\lambda(q)$ nur die Zahlen ± 1. Für diejenigen q, für die auch die Behauptung 3) zutrifft, kennt man die genaue Anzahl der positiven und negativen dieser Wurzeln, indem nach (104) der Anzahlüberschuss im wesentlichen die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{-q})$ ist.

Aus dem allgemeinen Satz 17 von Herrn Petersson folgt, dass die Matrizen $\lambda(m)$ sich simultan auf reelle Diagonalform transformieren lassen. Dies kann man hier einfacher auch unmittelbar nachweisen: Denn zunächst sind die $\lambda(m)$ simultan in reelle symmetrische Matrizen transformierbar, da offenbar für jedes symmetrische Schema $(a_{\rho\sigma})$

$$\left(\delta_{\rho\sigma} \cdot \sqrt{e_\rho}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{a_{\rho\sigma}}{e_\sigma}\right) \cdot \left(\delta_{\rho\sigma} \cdot \sqrt{e_\sigma}\right) = \left(\frac{a_{\rho\sigma}}{\sqrt{e_\rho \cdot e_\sigma}}\right)$$

eine symmetrische Matrix ist[1]. Eine Menge vertauschbarer reeller symmetrischer Matrizen kann aber bekanntlich simultan auf reelle Diagonalgestalt transformiert werden.

Nehmen wir für den Augenblick einmal an, dass auch Satz 53, 3) gelte, so sind die charakt. Wurzeln von $\Phi(s)$ genau $w = 1 + p_0(q)$ von einander verschiedene kanonische

[1] $(\delta_{\rho\sigma})$ bedeutet die Einheits-Matrix.

Euler-Produkte, welche linear äquivalent mit der Menge der $\varphi(s, Q_{\rho\sigma})$ sind. Ihre Gesamtheit ist eindeutig durch die Zahl q bestimmt. Eines von ihnen ist

$$\zeta(s) \cdot L(s-1, \chi_0) = \left(1 - q^{1-s}\right) \zeta(s) \cdot \zeta(s-1)$$

(der Eisenstein-Reihe $E_q(\tau)$ entsprechend), die übrigen sind Dirichlet-Reihen zu Spitzenformen, mit Koeffizienten aus einem total reellen algebraischen Zahlkörper. Die Bedeutung dieses Zahlkörpers für die Theorie der betr. Quaternionen ist vorläufig noch unbekannt.

§ 10. Quadratische Formen von Primzahlstufe und Nebentypus.

In diesem Paragraphen untersuchen wir die quadratischen Formen vom Typus $(-k, q, \chi)$, wo wieder q eine ungrade Primzahl, $\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right)$. Dann ist also

$$\text{(111)} \qquad \text{Diskr. } Q = (-1)^{\frac{q-1}{2}} \cdot q^{2l+1} \equiv 1 \pmod 4).$$

mit ungraden Exponenten $2l+1 \leqq 2k$, d. h. $0 \leqq l \leqq k-1$.

Die Hauptformel lautet hier

$$\text{(112)} \qquad \frac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}, Q\right)}{(-i\tau)^k} = \frac{1}{q^l \sqrt{q}}\, \vartheta\left(\frac{\tau}{q}, Q^*\right).$$

Ein jedes solche ϑ erzeugt mit seinen konjugierten Funktionen eine Darstellung der endlichen Modulargruppe $\mathfrak{M}(q)$ vom Grade $q+1$, die im allgemeinen in zwei irreduzible Darstellungen vom Grade $\frac{q+1}{2}$ zerfällt. Letztere werden nach Satz 13 erzeugt durch die beiden Funktionen

$$\vartheta \mid (W \pm \omega), \quad \omega = G_\chi = \begin{cases} |\sqrt{q}|, & \text{wenn } q \equiv 1 \pmod 4 \\ i\,|\sqrt{q}|, & \text{wenn } q \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

die Eigenfunktionen des Operators W. Wegen

$$\vartheta \mid W = \sqrt{q}\,(-i)^k q^{-l} \sum_{m=0}^{\infty} a(mq, Q^*) \cdot z^m \tag{113}$$

sind also die beiden Funktionen

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_\pm(m) z^m \text{ mit } c_\pm(m) = a(m, Q) \pm q^{-l} \frac{(-i)^k \sqrt{q}}{\omega}\, a(mq, Q^*)$$

vom Typus $(-k, q, \chi)$, und erzeugen zwei verschiedene irreduzible Darstellungen $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$, $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$, sofern sie nicht identisch verschwinden. Das letztere kann aber nur vorkommen, wenn $l = 0$, wie aus dem Wert von $c(0)$ folgt; und hier verschwindet tatsächlich auch die eine Reihe:

Satz 54: Ist die Diskriminante von Q eine ungrade Primzahl $(\gtrless 0)$, so definiert $\vartheta(\tau, Q)$ eine irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}$ des Grades $\frac{q+1}{2}$ und zwar

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}} \text{ (Reste), wenn } k \equiv 0 \text{ oder } 1 \pmod 4$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}} \text{ (Nichtreste), wenn } k \equiv 2 \text{ oder } 3 \pmod 4.$$

Beweis. Dass die Darstellung irreduzibel ist, folgt aus dem Satz 36 von Herrn SCHOENEBERG. Darnach bildet $\vartheta(\tau, Q)$ zusammen mit den $\vartheta(\tau, Q, \mathfrak{h})$ ein invariantes System, dessen Rang sich leicht zu $\frac{q+1}{2}$ ergibt. Denn für $\mathfrak{h} = (h_1, h_2, \ldots h_f)$ bestehen die Bedingungen

$$\sum_{l=1}^{f} a_{rl} h_l \equiv 0 \pmod q, \quad r = 1, 2, \ldots f. \tag{114}$$

Nun hat die Matrix (a_{rl}) der Form $2\,Q$ unter unseren Voraussetzungen mod q den Rang $f-1$, also ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen von (114) im Restklassenring mod q gleich 1, d. h. alle Lösungen lassen sich aus einer von ihnen in der Gestalt $t \cdot \mathfrak{h}$ ableiten, wo t mod q läuft. Es gibt also genau q verschiedene Lösungen von (114) mod q. Da $t \cdot \mathfrak{h}$ und $-t \cdot \mathfrak{h}$ dieselbe Thetareihe erzeugen, ist also die Anzahl der unabhängigen Elemente dieser invarianten Schar höchstens gleich $\frac{q+1}{2}$, also auch genau so gross, weil die Darstellung $\mathfrak{D}$ keinen kleineren Grad haben kann. Daher ist sie irreduzibel und $\vartheta(\tau, Q)$ muss nach Satz 13 dann Eigenfunktion des Operators W sein:

$$\vartheta \mid W = \pm\, \omega \cdot \vartheta .$$

Nach (113) ist aber dann wegen der konstanten Glieder

$$\vartheta \mid W = (-i)^k \sqrt{q} \cdot \vartheta \tag{115}$$

und das bedeutet für die Darstellungszahlen

$$a(m, Q) = a(mq, Q^*). \tag{116}$$

Aus (115) folgt nach Satz 14 die Behauptung.

Aus diesem Beweis schliesst man weiter, dass bei diesen Formen Q mit Primzahldiskriminante auch die Reihen $\vartheta(\tau, P_\nu, Q)$, gebildet mit den Kugelfunktionen P_ν, die Eigenschaft haben, dieselbe irreduzible Darstellung $\mathfrak{D}$ zu erzeugen, wie die Reihen mit $P_\nu \equiv 1$.

Nun sei Q eine b i n ä r e Form mit Diskr. $-q$. Zerlegen wir Q in zwei konjugiert komplexe Linear-Faktoren

$$Q(x_1, x_2) = l(x_1, x_2) \cdot \bar{l}(x_1, x_2),$$

so kann man die P_ν als die Potenzen l^ν, $\bar{l}^\nu$ wählen. Die Reihen

$$\sum_{n_1, n_2} l^{\nu}(n_1, n_2)\, z^{Q(n_1, n_2)} \quad \text{und} \quad \sum_{n_1, n_2} \bar{l}^{\nu}(n_1, n_2)\, z^{Q(n_1, n_2)}$$

sind dann bis auf konstante Faktoren die Reihen

$$\sum_{\mu \equiv 0\,(\mathfrak{a})} \mu^{\nu} z^{\frac{\mu\bar{\mu}}{A}},$$

wobei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal des Körpers $K(\sqrt{-q})$ mit der Norm A bedeutet und μ alle ganzen Zahlen aus $\mathfrak{a}$ durchläuft. Für grade $\nu \geqq 2$ und $q > 3$ (sowie für $\nu \equiv 0 \pmod 6$ bei $q = 3$) verschwinden die Reihen nicht identisch und definieren also nach dem vorigen die irreduzible Darstellung $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ (Rest). Die Reihen zu den verschiedenen Idealklassen sind ferner linear unabhängig, wenn $\nu > 0$. Wenn aber $\nu = 0$, so stimmt die Reihe für die Klasse von $\mathfrak{a}$ mit der für die reziproke Klasse bis auf einen Faktor überein, und da die Klassenzahl h ungrade ist, so erhält man nur $\frac{h+1}{2}$ wesentlich verschiedene Reihen, und diese sind auch linear unabhängig. Die Unabhängigkeit wird in allen Fällen mit Hilfe des ziemlich tief liegenden Satzes von der Existenz unendlich vieler Primzahlen in Winkelräumen bei quadratischen Formen bewiesen.

Nun sind bestimmte h lineare Kombinationen der ihnen entsprechenden Dirichlet-Reihen mit festem q und ν bekannt in der Theorie des Körpers $K(\sqrt{-q})$ als Zetafunktionen des Körpers, gebildet mit Grössencharakteren der Ordnung ν, und sie besitzen bekanntlich eine Eulersche Produktentwickelung. Sie sind also kanonische Euler-Produkte vom Typus $(-(\nu+1), q, \chi)$ und zwar eingliedrige, weil jene binären Thetareihen ein und dieselbe irreduzible Darstellung erzeugen. Nach Satz 27 ist aber h die genaue Anzahl der überhaupt vorhandenen eingliedrigen Produkte für die Dimension $-k$ mit $k > 1$. Damit haben wir eine vollständige Charakterisierung dieser binären Thetareihen mit $\nu \geqq 2$ durch eine Funktional-Eigenschaft:

Satz 55: Die Zetafunktionen des Körpers $K\left(\sqrt{-q}\right)$ mit Grössencharakteren der graden Ordnung $\nu \geqq 2$ (bei $q = 3$ mit $\nu \equiv 0 \pmod 6$) sind die einzigen kanonischen Euler-Produkte zur Stufe q und Dimension $-(\nu + 1)$, welche im Sinne von Satz 26 eingliedrig sind. Sie haben den Typus $(-(\nu+1), q, \chi)$ und gehören zur irreduziblen Darstellung $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ (Rest).

Bei der Dimension -1, welche $\nu = 0$ entspricht, kennt man die genaue Anzahl der betr. Vielfachheiten y_1, y_2 noch nicht, sodass vorläufig nur vermutet werden kann, dass der obige Satz auch bei $\nu = 0$ gilt.

Aus den letzten beiden Sätzen folgt nun ein wichtiges Resultat für Formen mit mehr Variabeln. Denken wir uns nämlich zu den quadratischen Formen von f Variabeln mit Primzahldiskriminante die Reihen $\varphi(s, Q)$ mit demselben f, q durch die kanonischen Euler-Produkte dargestellt und untersuchen wir, welche dieser Produkte umgekehrt auch durch diese $\varphi(s, Q)$ linear ausdrückbar sind, so können dies offenbar nur eingliedrige Produkte sein, weil die $\vartheta(\tau, Q)$ ja zu irreduziblen Darstellungen gehören. Von solchen Produkten gibt es aber nur die in Satz 55 beschriebenen und diese können nur bei $q \equiv 3 \pmod 4$ vorkommen. Das bedeutet aber

Satz 56: Kein einziges kanonisches Eulerprodukt, welches zur Darstellung der $\varphi(s, Q)$ bei quadratischen Formen in f Variabeln mit Primzahldiskriminante $(-1)^{\frac{q-1}{2}} q$ erforderlich ist, lässt sich allein durch diese $\varphi(s, Q)$ linear ausdrücken, wenn $q \equiv 1 \pmod 4$; dasselbe gilt auch bei $q \equiv 3 \pmod 4$, wenn die Anzahl f der Variabeln $\equiv 6 \pmod 8$.

Im letzteren Falle gehört nämlich die Reihe $\vartheta(\tau, Q)$ zur Darstellung $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ (Nichtreste).

In den genannten Fällen ist also das System der $\vartheta(\tau, Q)$ für die Q mit fester Diskriminante sicher kein abgeschlossenes System, auch nicht, wenn man an Stelle der $\vartheta(\tau, Q)$ nur die durch Addition der Eisenstein-Reihen entstehenden Spitzenformen zu Grunde legt.

Eine weitere Folgerung, die zu numerischen Rechnungen oft mit Vorteil benutzt wird und welche man übrigens auch aus der klassischen Theorie arithmetisch erschliessen kann, ergibt sich hier als ein Nebenresultat:

Satz 57: Für quadratische Formen Q in f Variabeln mit Primzahldiskriminante $(-1)^{\frac{q-1}{2}} q$ ist

$$a(m, Q) = a(mq, Q^*) \text{ für alle natürlichen Zahlen } m,$$
$$a(n, Q^*) = 0, \text{ wenn } \chi(n) = -1, \; f \equiv 0 \text{ oder } 2 \pmod 8$$
$$a(n, Q^*) = 0, \text{ wenn } \chi(n) = +1, \; f \equiv 4 \text{ oder } 6 \pmod 8.$$

Beweis: Die erste Gl. ist als (116) schon bewiesen. Zum Beweis der andern schliessen wir aus (112), dass die reduzierte Reihe $\tilde{\vartheta}(\tau, Q^*)$ zu Q^* dieselbe (irreduzible) invariante Schar erzeugt wie $\vartheta(\tau, Q)$. Nach (36) können daher in der Reihe $\tilde{\vartheta}(\tau, Q^*)$ nur solche Exponenten n vorkommen, wo $\chi(n) = +1$, wenn es sich um die Darstellung $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ (Reste) handelt, im andern Fall nur die mit $\chi(n) = -1$.

Endlich geben wir noch die Eisenstein-Reihen an, die zur Zurückführung der Thetareihen auf Spitzenformen nötig sind. Unter der zu Anfang dieses Paragraphen gemachten Voraussetzung (111) über Q findet man die konstanten Glieder der Potenzreihe $\vartheta(\tau, Q)$ bei $\tau = \infty$ und $\tau = 0$ aus (112) und ebenso aus § 2, (27) die von $E_1(\tau)$, $E_2(\tau)$ und erhält dann als Resultat

Satz 58: Die Funktion

$$\vartheta(\tau, Q) - \frac{\gamma_k q^{k-l-1} E_1(\tau) + E_2(\tau)}{A_k(q)}$$

ist eine Spitzenform vom Typus $(-k, q, \chi)$, wenn $k = \frac{1}{2} f > 1$.

Für die Dirichlet-Reihe $\varphi(s, Q)$ gilt also

Satz 59:

$$\varphi(s, Q) = \frac{1}{\gamma_k A_k(q)} \left(q^{k-l-1} \zeta(s-k+1) \cdot L(s,\chi) + \gamma_k \zeta(s) \cdot L(s-k+1,\chi) \right) + \psi(s),$$

wo $\psi(s)$ die Dirichlet-Reihe einer Spitzenform ist. $(k > 1)$.

Als asymptotische Werte von $a(n, Q)$ für $n \to \infty$ ergeben die obigen Formeln

$$a(n, Q) \sim \frac{1}{|A_k(q)|} \left(q^{k-l-1} + \gamma_k \chi(n) \right) \left| {\sum_{d|n}}' \chi(d) \cdot d^{k-1} \right|,$$

$$\text{wenn } (n, q) = 1.$$

Diese zwei kanonischen Produkte zu E_1 und E_2 treten also bei jeder solchen Q auf und zwar in einer Kombination, welche für alle Q mit derselben Diskriminante die gleiche ist. Daraus folgt analog zu Satz 52

Satz 60: Das System der $\varphi(s, Q)$, deren Q dieselbe Diskriminante und den Typus $(-k, q, \chi)$ haben, ist niemals abgeschlossen, wenn $k = \frac{1}{2} f > 1$.

Zu den binären Formen $(k = 1,\ f = 2)$ gibt es nur die eine Eisenstein-Reihe, welche der Formel für $E_2(\tau)$ mit $k = 1$ entspricht. In der Arithmetik des Körpers $K\left(\sqrt{-q}\right)$

wird bekanntlich gezeigt, (vgl. die Einleitung, § 1), dass die Reihen $\varphi(s, Q)$ linear durch die Zetafunktionen des Körpers, welche mit Idealklassen-Charakteren gebildet sind, darstellbar sind, und diese sind ja kanonische Euler-Produkte. Hier ist das System der $\varphi(s, Q)$ abgeschlossen.

In vielen Fällen erhält man ein abgeschlossenes System durch die Formen Q mit fester Diskriminante zusammen mit ihren adjungierten Formen. Auch dieses trifft aber nicht zu, wenn Q und Q^* dieselben Diskriminanten haben, d. h. wenn $l = \frac{k-1}{2}$.

Endlich gilt noch eine wichtige allgemeine Aussage über die charakteristischen Wurzeln der Matrix $\lambda(q)$:

Satz 61: Bei der Schar der Spitzenformen des Typus $(-k, q, \chi)$ sind die charakt. Wurzeln der Matrix $\lambda(q)$ komplexe Zahlen vom Betrage $q^{\frac{k-1}{2}}$.

Der Beweis dieses Satzes, den ich an anderer Stelle veröffentliche[1], wird mit Hilfe eines Operators K geführt, welchen ich bisher in meiner Theorie noch nicht verwendet habe. Dieser Operator K führt eine Funktion $f(\tau)$ in

$$f \mid K = \overline{f(-\bar{\tau})}$$

über, und ändert speziell den (reellen) Typus der Funktion nicht.

Verallgemeinerungen.

Die im Vorstehenden entwickelte Theorie ist weitgehender Verallgemeinerungen fähig. Zunächst kann man sie bei positiven ganzzahligen quadratischen Formen auf die Untersuchung der Darstellung von Formen durch Formen übertragen. Für den erforderlichen analytischen

[1] E. Hecke, Über die Darstellung der Determinante einer positiven quadratischen Form durch die Form., Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. Zürich 1940.

Apparat hat Herr Siegel[1] in seiner Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades die Grundlagen geschaffen.

Eine Verallgemeinerung anderer Art ist die auf total positive quadratische Formen in total reellen algebraischen Zahlkörpern n-ten Grades. Hier handelt es sich zuerst um das Problem der Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl des Körpers durch eine solche Form. An die Stelle der elliptischen Modulfunktionen treten die Hilbertschen Modulfunktionen von n Variabeln, die zur Modulgruppe in diesem Körper n-ten Grades gehören. Während bisher einer Potenzreihe in einer Variabeln nur eine Dirichlet-Reihe zugeordnet wurde, gibt es hier zu einer »Potenzreihe im Grundkörper« mit n Variabeln unendlich viele Dirichlet-Reihen. Sie müssen unter Heranziehung der von mir eingeführten »Grössencharaktere im Grundkörper« aus der Potenzreihe hergeleitet werden.

Die Übertragung auf indefinite Formen stösst zunächst auf Schwierigkeiten. Die Potenzreihen in einer Variabeln, welche man etwa bei indefiniten Formen mit rationalen Koeffizienten ansetzen kann, sind zwar zum Teil auch elliptische Modulfunktionen, wie Herr Siegel[2] in seinen letzten Untersuchungen angedeutet hat, aber einige unter ihnen sind sicher keinen elliptischen Modulfunktionen.[3] Dies zeigt bereits das einfachste Beispiel der binären indefiniten Formen, die ich einmal untersucht habe.[4] Hier

[1] C. L. Siegel, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann. 116 (1939).

[2] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen, Math. Zeitschr. 43 (1938), 44 (1939).

[3] B. Schoeneberg, Indefinite Quaternionen und Modulfunktionen, Math. Ann, 113 (1936).

[4] E. Hecke, Über das Verhalten von $\sum\limits_{m,n} e^{2\pi i \tau \frac{|m^2-2n^2|}{8}}$ und ähnlichen Funktionen bei Modulsubstitutionen, Crelles Journal f. d. r. u. ang. Math. 157 (1926).

wird man indes auf den Ansatz geführt, der binären indefiniten Form $Q = \mu \cdot \mu'$ die Potenzreihe mit den Exponenten $\tau\mu^2 + \tau'\mu'^2$ zuzuordnen und somit der Zetafunktion des reellen quadratischen Körpers die Potenzreihe $\sum\limits_{\mu} e^{2\pi i(\tau\mu^2 + \tau'\mu'^2)}$ entsprechen zu lassen, wo μ alle ganzen Zahlen des Körpers durchläuft. Neben der Dedekindschen Zetareihe hat man daher gleichzeitig alle Zetareihen mit Grössencharakteren heranzuziehen, denn erst diese unendliche Menge von Funktionen einer Variabeln ist das Äquivalent für jene Funktion von zwei Variabeln τ und τ'. Diese Potenzreihe ist nun zwar eine Hilbertsche Modulfunktion (bezüglich der Modulgruppe in dem reellen quadratischen Körper), aber von gebrochener Dimension $-\frac{1}{2}$, und deshalb kann man die Theorie der Operatoren T_n in der bisherigen Gestalt ebensowenig anwenden wie etwa bei der einfachen Thetareihe. Man wird also hier von einer andern Seite auf das schon früher von mir formulierte Problem geführt, wie man das Euler-Produkt für die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(2s)$ oder für die Zetafunktion des reellen quadratischen Körpers als Ausdruck einer algebraischen Eigenschaft der Thetareihen gebrochener Dimension deuten kann.

§ 11. Numerische Beispiele.

Zum Schluss gebe ich hier eine Reihe numerischer Beispiele von Formen in 4, 6, 8 und 10 Variabeln von Primzahlstufe. Durch Anwendung aller feineren Hilfsmittel der allgemeinen Theorie, auch des Hauptsatzes aus der Theorie von Herrn Siegel (Gl. (8)), lassen sich auch für grosse Werte der Determinanten mit wenig Rechnung alle Formen oder wenigstens ihre Thetareihen angeben, insbesondere kann man die kanonischen Euler-Produkte aufstellen, den Körper ihrer Koeffizienten angeben und vor allem die Frage entscheiden, welche Diskriminanten zur Aufstellung der kanonischen Produkte herangezogen werden müssen und welche entbehrlich sind.

Die Formensysteme in 4 Variabeln vom Haupttypus, die bei den Brandtschen Quaternionen auftreten und die mir bei der Aufstellung meiner Theorie von grösstem Werte waren, verdanke ich der Freundlichkeit von Herrn Brandt. Einen Teil dieser Formen bringe ich hier als Beispiel 2, 3, 4.

Zunächst ist die Anzahl der linear unabhängigen Spitzenformen $x(k) + e(k)$ des Haupttypus und $Y(k)$ des Nebentypus für die ersten Werte von q und k in den folgenden Tabellen berechnet:

I. Tabelle der Anzahlen $x(k)$.

q	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
$x(2)$	0	0	0	1	0	1	1	2	2	2	2	3
$x(4)$	0	1	1	2	3	4	4	5	7	7	9	10
$x(6)$	1	1	3	4	5	6	8	9	11	13	15	16
$x(8)$	1	3	3	6	7	10	10	13	17	17	21	24
$x(10)$	2	3	5	8	9	12	14	17	21	23	27	30
$x(12)$	2	4	6	9	12	15	17	20	26	28	34	37

II. Tabelle der Anzahlen $Y(k)$ für $q \equiv 1 \pmod 4$.

q	5	13	17	29	37	41
$Y(2)$	0	0	0	2	2	2
$Y(4)$	0	2	4	6	8	10
$Y(6)$	2	6	6	12	16	16
$Y(8)$	2	6	10	16	20	24
$Y(10)$	4	10	12	22	28	30
$Y(12)$	4	12	16	26	34	38

III. Tabelle der Anzahlen $Y(k)$ und $h(\sqrt{-q})$ für $q \equiv 3 \pmod 4$.

q	3	7	11	19	23	31	43	47
h	1	1	1	1	3	3	1	5
$Y(3)$	0	1	1	3	3	5	7	7
$Y(5)$	0	1	3	5	7	9	13	15
$Y(7)$	1	3	5	9	11	15	21	23
$Y(9)$	2	5	7	13	15	21	29	31
$Y(11)$	2	5	9	15	19	25	35	39
$Y(13)$	3	7	11	19	23	31	43	47

Beispiel 1. $f = 4$, Haupttypus, für $q = 3, 5, 7, 13$ ist $x(2) = 0$. Hier gibt es also nur je eine Thetareihe, sie ist gleich der Eisenstein-Reihe. Für diese quadratischen Formen Q in 4 Variabeln, der Stufe q und der Diskr. q^2 besteht also die Gleichung

$$(117) \qquad \varphi(s, Q) = \frac{24}{q-1} \zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdot (1 - q^{1-s}).$$

Beispiel 2. $f = 4$, **Stufe** $q = 11$, $\Delta = q^2$. Wegen $x(2) = 1$ gibt es zwei Modulformen des Haupttypus, ausser $E_q(\tau)$ noch den Integranden 1. Gattung; durch die Weierstrass'sche Funktion

$$\Delta(\tau) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{24}$$

lässt er sich in der Gestalt

$$(118) \begin{cases} j(\tau) = \sqrt[12]{\Delta(\tau) \cdot \Delta(11\tau)} \\ \quad = z - 2z^2 - z^3 + 2z^4 + z^5 + 2z^6 - 2z^7 + 0z^8 + \ldots . \end{cases}$$

ausdrücken. Als einzige Spitzenform hat $j(\tau)$ ein kanonisches Euler-Produkt. Es gibt drei Klassen quadratischer Formen dieses Typus:

$$(119)\begin{cases} Q_{11} = x_1^2 + x_1x_2 + 3\,x_2^2 + x_3^2 + x_3x_4 + 3\,x_4^2 \\ Q_{12} = 2\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + 2\,x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - 2\,x_2x_4 \\ Q_{22} = x_1^2 + 4(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + x_1x_3 + 4\,x_2x_3 + 3\,x_2x_4 + 7\,x_3x_4\,. \end{cases}$$

In der Abkürzung $\vartheta_{ik} = \vartheta(\tau, Q_{ik})$ ist

$$(120)\begin{cases} \vartheta_{11} = 1 + 4\,z + 4\,z^2 + 8\,z^3 + 20\,z^4 + 16\,z^5 + \dots \\ \vartheta_{12} = 1 + 0\,z + 12\,z^2 + 12\,z^3 + 12\,z^4 + 12\,z^5 + \dots \\ \vartheta_{22} = 1 + 6\,z + 0\,z^2 + 6\,z^3 + 24\,z^4 + 18\,z^5 + \dots \end{cases}$$

Hieraus folgen die Gleichungen

$$(121)\begin{cases} \frac{1}{4}\vartheta_{11} + \frac{1}{6}\vartheta_{12} = \frac{1}{4}\vartheta_{12} + \frac{1}{6}\vartheta_{22} = E_q(\tau) \\ j(\tau) = \frac{1}{4}(\vartheta_{11} - \vartheta_{12}) = \frac{1}{2}(\vartheta_{22} - \vartheta_{11}) = \frac{1}{6}(\vartheta_{22} - \vartheta_{12})\,. \end{cases}$$

Die Berechnung nach Satz 43 ergibt in Übereinstimmung mit Satz 53: Die Koeffizienten der Matrix

$$\mathsf{B}(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\vartheta_{11}, & \frac{1}{6}\vartheta_{12} \\ \frac{1}{4}\vartheta_{12}, & \frac{1}{6}\vartheta_{22} \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(n)\, z^n$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5}, & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5}, & \frac{2}{5} \end{pmatrix} E_q(\tau) + \begin{pmatrix} \frac{2}{5}, & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5}, & \frac{3}{5} \end{pmatrix} j(\tau)$$

sind vertauschbar und die zugehörige Matrix aus Dirichlet-Reihen

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\varphi(s, Q_{11}), & \frac{1}{6}\varphi(s, Q_{12}) \\ \frac{1}{4}\varphi(s, Q_{12}), & \frac{1}{6}\varphi(s, Q_{22}) \end{pmatrix}$$

$$= \prod_p \left(\mathsf{E} - \lambda(p)\, p^{-s} + p^{1-2s}\,\mathsf{E}\right)^{-1}$$

ist ein kanonisches Euler-Produkt. Die char. Wurzeln von $\Phi(s)$ sind

$$\zeta(s) \cdot \zeta(s-1) \cdot (1 - q^{1-s})$$

und die Dirichlet-Reihe zu $j(\tau)$.

Beispiel 3. $f = 4$, **Stufe** $q = 17$, $\Delta = q^2$, $x(2) = 1$. Die drei quadratischen Formen sind

$$\begin{aligned} Q_{11} &= x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 6x_4^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_4 - 5x_3x_4 \\ Q_{12} &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 5x_4^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + 3x_3x_4 + x_2x_3 \\ Q_{22} &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 5x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_3x_4 + x_2x_4 + x_2x_3 . \end{aligned}$$

Die Matrix $\Phi(s)$ ist wieder vom Grade 2, gleich

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\varphi(s, Q_{11}), & \frac{1}{2}\varphi(s, Q_{12}) \\ \frac{1}{6}\varphi(s, Q_{12}), & \frac{1}{2}\varphi(s, Q_{22}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\varphi_{11}, & \frac{1}{2}\varphi_{12} \\ \frac{1}{6}\varphi_{12}, & \frac{1}{2}\varphi_{22} \end{pmatrix}.$$

Die beiden kanonischen Euler Produkte sind

$$\zeta(s)\cdot\zeta(s-1)\,(1-q^{1-s}) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\varphi_{11} + \frac{1}{2}\varphi_{12}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{6}\varphi_{12} + \frac{1}{2}\varphi_{22}\right)$$

$$P(s) = \frac{1}{4}(\varphi_{22} - \varphi_{11}) = \frac{1}{6}(\varphi_{11} - \varphi_{12}) = \frac{1}{2}(\varphi_{22} - \varphi_{12}).$$

Beispiel 4. $f = 4$, **Stufe** $q = 31$, $\Delta = q^2$, $x(2) = 2$. Hier hat die Matrix $\Phi(s)$ den Grad 3, die kanonischen Produkte zu den beiden Spitzenformen haben konjugierte

Koeffizienten aus dem Körper $K(\sqrt{5})$. Die einzelnen Formeln habe ich bereits früher publiziert.[1]

Beispiel 5. $f = 4$, **Stufe** $q = 23$, $\Delta = q^2$; $x(2) = 2$. Auch hier enthalten die beiden kanonischen Produkte zu den Spitzenformen nur die Irrationalität $\sqrt{5}$.

Beispiel 6. $f = 4$, Nebentypus der **Stufen** $q = 5, 13, 17$. $\Delta = q$ und für die adjungierten Formen $\Delta^* = q^3$. Hier gibt es keine Spitzenformen, also sind die Thetareihen gleich den betr. Eisenstein-Reihen:

$$|A_2(q)| \cdot \varphi(s, Q) = q\zeta(s-1) \cdot L(s,\chi) - \zeta(s) \cdot L(s-1,\chi), \quad (\Delta = q).$$
$$|A_2(q)| \cdot \varphi(s, Q^*) = \zeta(s-1) \cdot L(s,\chi) - \zeta(s) \cdot L(s-1,\chi), \quad (\Delta^* = q^3).$$

Beispiel 7. $f = 4$, Nebentypus der **Stufe** $q = 29$. Die Formen mit Diskr. q gehören nach Satz 54 zur irreduziblen Darstellung $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ (Nichtrest). Ausser der Eisenstein-Reihe gibt es noch eine Spitzenform zu dieser Darstellung. Folgende zwei quadratische Formen mit Diskr. 29 (vgl. Satz 31)

$$Q_1 = \frac{1}{2}\sum_1^4 x_i^2 + \frac{1}{2}(3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4)^2$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\sum_1^4 x_i^2 + \frac{7}{2}\left(\sum_1^4 x_i\right)^2$$

liefern wirklich zwei linear unabhängige Thetareihen

$$(122)\quad \begin{cases} \vartheta(\tau, Q_1) = 1 + 8z + 12z^2 + 18z^3 + 32z^4 + \ldots. \\ \vartheta(\tau, Q_2) = 1 + 12z + 6z^2 + 24z^3 + 20z^4 + \ldots.. \end{cases}$$

Die beiden adjungierten Formen mit Diskr. 29^3 ergeben

$$(123)\quad \begin{cases} \vartheta(\tau, Q_1^*) = 1 + 2z^3 + 4z^8 + \ldots. \\ \vartheta(\tau, Q_2^*) = 1 + 2z^2 + 2z^8 + \ldots. \end{cases}$$

[1] Neuere Fortschritte i. d. Theorie d. ellipt. Modulfunktionen. Verh. d. Internat. Mathem. Kongr. Oslo 1936.

Weitere Thetareihen dieses Typus kann es nicht geben. Denn für eine Form Q mit Diskr. 29 müsste wegen der linearen Unabhängigkeit von (122)

$$\vartheta(\tau, Q) = \alpha\,\vartheta(\tau, Q_1) + \beta\,\vartheta(\tau, Q_2)$$

mit konstanten α, β sein. Die gleiche Beziehung folgt aber durch Anwendung des Operators H auch für die Reihen mit den adjungierten Formen. Die numerischen Werte in (123) zeigen nun, dass in einer solchen Linearkombination die Reihe nur dann das konstante Glied 1 und im übrigen nur grade nicht-negative Koeffizienten haben kann, wenn $\alpha = 1, \beta = 0$ oder $\alpha = 0, \beta = 1$. Weitere Formenklassen mit der Diskr. $q = 29$ müssten also stets eine der beiden obigen Thetareihen haben. (Wie mir Herr Brandt mitteilt, ist die Klassenzahl zur Diskr. 29 übrigens wirklich nur gleich 2). Die 4 Thetareihen bilden dass vollständige Formensystem des Nebentypus, erzeugen also ein abgeschlossenes System. Die 4 kanonischen Produkte in der Schar der Dirichlet-Reihen sind erstens die beiden

$$(124)\quad \begin{cases} \dfrac{56}{3}\zeta(s)\cdot L(s-1,\chi) = 2\varphi(s,Q_1) + \varphi(s,Q_2) - 2\varphi(s,Q_1^*) - \varphi(s,Q_2^*) \\ \dfrac{56}{3}\zeta(s-1)\cdot L(s,\chi) = 2\varphi(s,Q_1) + \varphi(s,Q_2) - 58\varphi(s,Q_1^*) - 29(s,Q_2^*) \end{cases}$$

und zweitens, von den Spitzenformen herrührend,

$$(125)\qquad P(s) = \frac{1}{4}\Big(\big(-\varphi(s,Q_1) + \varphi(s,Q_2)\big) + \lambda\big(-\varphi(s,Q_1^*) + \varphi(s,Q_2^*)\big)\Big)$$

mit

$$\lambda = 3 + 2i\sqrt{5}$$

und die Reihe $\bar{P}(s)$ mit den konjugiert-komplexen Koeffizienten. Umgekehrt stellen sich die Reihen $\varphi(s, Q)$ so dar:

$$(126)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(s, Q_1) &= \frac{q}{3}\zeta(s-1)\cdot L(s,\chi) - \frac{1}{3}\zeta(s)\cdot L(s-1,\chi)\\
&\qquad + \frac{4}{3}\frac{\bar\lambda}{\lambda-\bar\lambda}P(s) - \frac{4}{3}\frac{\lambda}{\lambda-\bar\lambda}\bar P(s)\\
\varphi(s, Q_2) &= \frac{q}{3}\zeta(s-1)\cdot L(s,\chi) - \frac{1}{3}\zeta(s)\cdot L(s-1,\chi)\\
&\qquad - \frac{8}{3}\frac{\bar\lambda}{\lambda-\bar\lambda}P(s) + \frac{8}{3}\frac{\lambda}{\lambda-\bar\lambda}\bar P(s)\\
\varphi(s, Q_1^*) &= \frac{1}{3}\zeta(s-1)\cdot L(s,\chi) - \frac{1}{3}\zeta(s)\cdot L(s-1,\chi)\\
&\qquad - \frac{4}{3}\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}P(s) + \frac{4}{3}\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}\bar P(s)\\
\varphi(s, Q_2^*) &= \frac{1}{3}\zeta(s-1)\cdot L(s,\chi) - \frac{1}{3}\zeta(s)\cdot L(s-1,\chi)\\
&\qquad + \frac{8}{3}\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}P(s) - \frac{8}{3}\frac{1}{\lambda-\bar\lambda}\bar P(s).
\end{aligned}\right.$$

Die Zahl $-\bar\lambda$ ist der Eigenwert von $P(s)$ bei dem Operator T_q^q und hat in Übereinstimmung mit Satz 61 die Eigenschaft

$$\lambda\cdot\bar\lambda = 29.$$

Beispiel 8. $f = 4$, Nebentypus der **Stufe** $q = 37$. Ebenso wie bei $q = 29$ gibt es genau zwei verschiedene Reihen zu Formen mit Diskr. 37. Die vier Formen

$$Q_1 = \frac{1}{2}\sum_1^4 x_i^2 + \frac{9}{2}\left(\sum_1^4 x_i\right)^2$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}\sum_1^4 x_i^2 + \frac{1}{2}(5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4)^2$$

$$Q_1^* = \frac{37}{2}\sum_1^4 x_i^2 - \frac{9}{2}\left(\sum_1^4 x_i\right)^2$$

$$Q_2^* = \frac{37}{2}\sum_1^4 x_i^2 - \frac{1}{2}(5\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 + x_4)^2$$

liefern die 4 unabhängigen Reihen

$$(127)\quad \begin{cases} \vartheta(\tau, Q_1) = 1 + 12\,z + 6\,z^2 + 24\,z^3 + 12\,z^4 + \ldots \\ \vartheta(\tau, Q_2) = 1 + 6\,z + 8\,z^2 + 30\,z^3 + 24\,z^4 + \ldots \\ \vartheta(\tau, Q_1^*) = 1 + 2\,z^2 + 2\,z^8 + (z^{13}) \\ \vartheta(\tau, Q_2^*) = 1 + 2\,z^5 + 2\,z^8 + (z^{13}). \end{cases}$$

Die kanonischen Produkte zu den Spitzenformen sind

$$(128)\quad P(s) = \frac{1}{6}\big(\varphi(s, Q_1) - \varphi(s, Q_2)\big) + \lambda\big(\varphi(s, Q_1^*) - \varphi(s, Q_2^*)\big)$$

mit

$$\lambda = 1 + 6\,i$$

und die Reihe $\overline{P}(s)$ mit den konjugiert-komplexen Koeffizienten. Die Zahl $-\overline{\lambda}$ ist der Eigenwert von $P(s)$ bei dem Operator T_q^q und

$$\lambda \cdot \overline{\lambda} = 37 = q.$$

Beispiel 9. $f = 6$, Nebentypus der **Stufe** $\mathfrak{q} = 7$ **oder 11.** Hier gibt es nur eine Spitzenform, sie gehört zur irreduziblen Darstellung $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ (Rest) und lässt sich durch die binäre Reihe mit Grössencharakteren 2. Grades darstellen:

$$(129)\qquad \vartheta_k(\tau) = \sum_{\mu}{}' \mu^{k-1}\, z^{\mu\overline{\mu}}. \quad (k = 3)$$

μ durchläuft hier alle ganzen Zahlen aus dem Körper $K\left(\sqrt{-q}\right)$. Die quadratischen Formen in 6 Variabeln mit

Diskr. $-q$ ergeben aber Theta-Reihen, welche nach Satz 54 zu der andern irreduziblen Darstellung $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ (Nichtrest) gehören. Also sind sie gleich der entsprechenden Eisenstein-Reihe, d. h. für jede Form Q_6 in 6 Variabeln mit Diskr. -7 oder -11 ist

$$(130) \quad |A_3(q)| \cdot \varphi(s, Q_6) = q^2 \zeta(s-2) L(s,\chi) - \zeta(s) \cdot L(s-2,\chi).$$

Jetzt gibt es aber Formen mit Diskr. $-q^3$, welche auch noch zur Stufe q gehören. Ist Q_6 eine solche Form (etwa eine Summe von drei binären Formen der Diskr. $-q$), so besteht also eine Gleichung

$$\vartheta(\tau, Q_6) = E(\tau) + \alpha \vartheta_3(\tau)$$

mit konstantem α. Dabei hat die Eisenstein-Reihe

$$E(\tau) = \frac{1}{|A_3(q)|}\big(qE_1(\tau) - E_2(\tau)\big)$$

bei z keinen ganzen Koeffizienten, und daher ist $\alpha \neq 0$. Mithin gibt es in dem Geschlecht von Q_6 nach dem Hauptsatz der Theorie von Herrn Siegel noch mindestens eine weitere von $\vartheta(\tau, Q_6)$ verschiedene Thetareihe. Es gibt also für $q = 7, 11$ genau je zwei linear unabhängige Thetareihen dieses Typus mit Diskr. $-q^3$; sie bilden aber kein abgeschlossenes System. Für $q = 11$ erhält man übrigens die erwähnten Formen als Summe der binären Form und der quaternären Form aus Beispiel 2.

Beispiel 10. $f = 6$, Nebentypus der **Stufe** $q = 19$. Hier gibt es zur Darstellung $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ (Nichtrest) eine Spitzenform, dagegen zu der andern Darstellung ausser der binären Reihe ϑ_3 mit $q = 19$ ebenfalls noch eine Spitzenform. Eine quadratische Form mit Diskr. -19 ist

$$Q(x) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{6} x_i^2 + \frac{3}{2}\left(\sum_{1}^{6} x_i\right)^2$$

mit der Reihe

(131) $\vartheta(\tau, Q) = 1 + 30\,z + 102\,z^2 + 260\,z^3 + 450\,z^4 + \ldots$

Da

(132) $S(\tau) = \frac{11}{6}\left[\vartheta(\tau, Q) - \frac{q^2 E_1 - E_2}{11}\right] = -5\,z + 6\,z^2 - 6\,z^3 + 45\,z^4 + \ldots$

eine Spitzenform zu $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ (Nichtrest) ist, so ist für jede weitere Form X mit Diskr. -19

$$\vartheta(\tau, X) = \vartheta(\tau, Q) + \alpha\,S(\tau)$$

mit konstantem α. Durch den Operator H folgt hieraus

$$\vartheta(\tau, X^*) = \vartheta(\tau, Q^*) + \alpha\,S^*(\tau),$$

wo

$$\vartheta(\tau, Q^*) = 1 + 2\,z^3 + 12\,z^8 + (z^9)$$

(133) $S^*(\tau) = \frac{11}{6}\left[\vartheta(\tau, Q^*) - \frac{E_1 - E_2}{11}\right] = -z^2 + z^3 + 5\,z^8 + (z^9).$

Derselbe Schluss wie in Beispiel 7 ergibt $\alpha = 0$ oder -2. Da endlich nach dem erwähnten Hauptsatz von Herrn Siegel noch mindestens eine von $\vartheta(\tau, Q)$ verschiedene Reihe $\vartheta(\tau, X)$ existieren muss, so gibt es eine quadratische Form X mit Diskr. -19, wofür

(134) $\begin{cases} \vartheta(\tau, X) = \vartheta(\tau, Q) - 2\,S(\tau) \\ \vartheta(\tau, X^*) = \vartheta(\tau, Q^*) - 2\,S^*(\tau). \end{cases}$

Es muss also diese Form X^* die Zahl 2 darstellen, anders als Q^*. Ein systematisches Verfahren nach Satz 31 führt dann zur Aufstellung einer solchen Form:

$$(135)\quad X = \frac{1}{2}\left(\sum_{1}^{6} x_i^2 + \left(3x_1 + 3x_2 + \sum_{3}^{6} x_i\right)^2\right) - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2.$$

Ihre Thetareihe ist durch (134) bereits völlig bekannt. Die beiden Spitzenformen $S(\tau), S^*(\tau)$ führen auf zwei kanonische Euler-Produkte mit konjugiert-komplexen Koeffizienten aus dem Körper $K(\sqrt{-13})$, so erhält man schliesslich

$$(136)\begin{cases} \varphi(s,Q) = \dfrac{q^2\zeta(s-2)\cdot L(s,\chi) - \zeta(s)L(s-2,\chi)}{11} + \dfrac{3}{11}\,\dfrac{\bar\lambda P(s) - \lambda \bar P(s)}{\sqrt{-13}} \\ \varphi(s,Q^*) = \dfrac{\zeta(s-2)L(s,\chi) - \zeta(s)L(s-2,\chi)}{11} - \dfrac{3}{11}\,\dfrac{P(s) - \bar P(s)}{\sqrt{-13}}. \end{cases}$$

Hier ist

$$\lambda = 6 + 5\sqrt{-13},$$

und das kanonische Produkt $P(s)$ ist die Dirichlet-Reihe zu

$$\frac{S + \lambda S^*}{-5} = \frac{1}{10}\left\{\vartheta(\tau, X) - \vartheta(\tau, Q) + \lambda\vartheta(\tau, X^*) - \lambda\vartheta(\tau, Q^*)\right\}.$$

Die Zahl $\bar\lambda$ ist der Eigenwert von $P(s)$ bei T_q^q und

$$\lambda \cdot \bar\lambda = 19^2.$$

Das System der 4 Formen Q, X, Q^*, X^* ist also wieder abgeschlossen. Hier gibt es aber zu diesem Typus $(-3, 19, \chi)$ noch quadratische Formen mit Diskr. -19^3, z. B. die Summe von drei binären Formen. Deren Dirichlet-Reihen erfordern ausser $P(s), \bar P(s)$ und $\zeta(s-2)L(s), \zeta(s)L(s-2)$ noch ein fünftes kanonisches Produkt. Dies geht aus folgender Identität hervor (in der Bezeichnung (129) mit $q = 19$)

$$\vartheta_1^3 = \frac{qE_1 - E_2}{11} - \frac{24}{11\cdot 13}\left(3S + 3\cdot 19 S^* - \frac{11}{2}\vartheta_3\right).$$

Die Reihenentwickelung

$$(137) \qquad \frac{1}{2}\vartheta_3 = z + 4z^4 + (z^5)$$

zeigt übrigens mit Rücksicht auf (132), (133), dass hier das interessante Faktum vorliegt, dass die drei existierenden Spitzenformen S, S^*, ϑ_3 nicht durch die ersten drei Glieder ihrer Potenzreihe festgelegt werden können, sondern dass hierzu die ersten vier Glieder nötig sind.

Beispiel 11. $f = 8$, Stufe $q = 11$. Es gibt vier Modulformen des Typus $(-4, 11, 1)$, darunter zwei Spitzenformen. In der Bezeichnung von (118) (129) können wir letztere als

$$\vartheta_1^2 j = z + 2z^2 - 5z^3 - 2z^4 + \ldots$$
$$j^2 = z^2 - 4z^3 + 2z^4 + \ldots$$

darstellen. Die Spitzenformen mit kanonischem Produkt sind

$$F = \vartheta_1^2 j + (-1 + \sqrt{3}) j^2, \qquad F' = \vartheta_1^2 j + (-1 + \sqrt{3}) j^2$$

mit den Dirichlet-Reihen $P(s)$ und $P'(s)$. Sie sind offenbar durch Thetas zu Formen mit Diskr. q^4 (Summe von zwei quaternären Formen aus Beispiel 2) darstellbar. Umgekehrt stellen also die drei Funktionen F, F' und die zugehörige Eisenstein-Reihe

$$\frac{1}{\rho_4}\frac{q^2-1}{q^4-1} G_4(\tau) + \frac{1}{\rho_4}\frac{q^4-q^2}{q^4-1} G_4(q\tau) = \frac{120}{61}\left(G_4(\tau) + q^2 \cdot G_4(q\tau)\right)$$

alle Thetareihen zu Formen mit $f = 8$, Diskr. q^4 linear dar, z. B. die sechs Reihen aus Beispiel 2

$$\vartheta_{rs} \cdot \vartheta_{ik}\,.$$

Nimmt man hier noch die imprimitive Form $q \cdot Q_8$ mit Diskr. q^8 hinzu, wobei Q_8 die Form mit Diskr. 1 aus § 7 bedeutet, so ist also offenbar das System aller quadratischen Formen in 8 Variabeln mit Diskr. q^4 oder q^8 der Stufe $q = 11$ ein abgeschlossenes System. Es führt auf die vier kanonischen Produkte

$$P(s),\ P'(s),\ \zeta(s)\cdot\zeta(s-3)(1-q^{-s}),\ \zeta(s)\cdot\zeta(s-3)(1-q^{3-s}).$$

Da hiermit schon alle Modulformen dieses Typus erschöpft sind, so sind die Reihen zu Formen dieses Typus mit Diskr. q^2 oder q^6 bereits durch obige Reihen zur Diskr. q^4 und q^8 darstellbar. Es ist wichtig, dass auch das Umgekehrte gilt:

Die Formen mit Diskr. q^2 und ihre Adjungierten mit Diskr. q^6 erzeugen auch grade vier unabhängige Reihen, und zwar gibt es genau vier verschiedene (drei unabhängige) Thetareihen zur Diskr. q^2 und ebensoviele zur Diskr. q^6.

Das geht aus folgender Überlegung hervor:

Sei Q eine Form des Typus $(-4, 11, 1)$ mit Diskr. $q^6 = 11^6$, dann besteht eine Gleichung

$$\vartheta(\tau, Q) = E(\tau) + \alpha\vartheta_1^2 j + \beta j^2 \tag{138}$$

mit konstantem α, β und

$$\left\{\begin{aligned} E(\tau) &= \frac{1}{\rho_4}\frac{q-1}{q^4-1}G_4(\tau) + \frac{1}{\rho_4}\frac{q^4-q}{q^4-1}G_4(q\tau) \\ &= \frac{10}{61}\big(G_4(\tau) + 11\cdot 133\, G_4(q\tau)\big). \end{aligned}\right. \tag{139}$$

Stellt man jetzt die Bedingungen für α, β auf, damit die rechte Seite in (138) eine Reihe mit nicht-negativen graden Koeffizienten darstellt, so findet man, dass mit ganzem x, y sein muss

$$(140)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{122x - 10}{61}, \quad \beta = \dfrac{122y - 70}{61} \\ x \geqq 0, \quad y \geqq -2x, \quad 5x + 4y \leqq 5, \quad x - y \leqq 2. \end{cases}$$

Für x, y ergeben sich hieraus nur die vier Möglichkeiten

$$(x, y) = (1, -1); \quad (1, 0); \quad (0, 1); \quad (0, 0).$$

Das gibt die Werte

$$\begin{aligned} 61\alpha &= 7\cdot 16; \quad 7\cdot 16; \quad -10; \quad -10. \\ 61\beta &= -12\cdot 16; \quad -7\cdot 10; \quad 4\cdot 13; \quad -7\cdot 10. \end{aligned}$$

Hiervon wird die erste durch die Form $Q_2 + Q_6^*$ realisiert, wo Q_2 die binäre Form und Q_6 die Form in 6 Variabeln mit Diskr. -11 aus dem Beispiel 9 ist. Da nun nach dem Siegelschen Hauptsatz die obige Reihe $E(\tau)$ aus den verschiedenen Thetareihen zur Diskr. -11^6 linear darstellbar sein muss, so müssen mindestens drei der Möglichkeiten (α, β) durch die $\vartheta(\tau, Q)$ in (138) realisiert sein. Da die erwähnte Darstellung von $E(\tau)$ aber positive Koeffizienten haben muss, so ist auch die vierte Möglichkeit für α, β realisiert, weil man aus dreien offenbar eine solche Darstellung von $E(\tau)$ nicht erreichen kann.

Wir können also zusammenfassend sagen: Die Thetareihen des Typus $(-4, 11, 1)$ mit den Diskr. q^r, q^s erzeugen ein abgeschlossenes System wenn r, s irgend zwei verschiedene der Zahlen $2, 4, 6, 8$ sind. Dieses abgeschlossene System ist stets auch das volle System aller Modulformen dieses Typus.

Beispiel 12. $f = 4$, $\nu = 2$, **Stufe** $q = 11$. Die beiden Spitzenformen aus dem vorigen Beispiel kann man nun auch durch die quaternären Thetareihen mit Kugelfunktionen 2. Grades erzeugen. Die Rechnung zeigt nämlich, dass bei jeder der drei quaternären Formen Q_{ik} aus (119) die Reihen $\vartheta(\tau, P_2, Q_{ik})$ für alle Kugelfunktionen 2. Ordnung P_2 bis auf einen konstanten Faktor nur je eine einzige Funktion sind. Unter den drei so entstehenden Funktionen befinden sich aber tatsächlich zwei unabhängige, und das Multiplikationstheorem lässt sich folgendermassen formulieren: Bei passender Wahl der drei Kugelfunktionen P_{ik} zu Q_{ik} ist die Matrix

$$\Phi(s) = \begin{pmatrix} \varphi(s, P_{11}, Q_{11}), & \varphi(s, P_{12}, Q_{12}) \\ 2\,\varphi(s, P_{12}, Q_{12}), & \varphi(s, P_{22}, Q_{22}) \end{pmatrix}$$

ein kanonisches Euler-Produkt.

Beispiel 13. $f = 10$, Nebentypus der **Stufe** $q = 11$. Es gibt zwei Spitzenformen zur irreduziblen Darstellung $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ (Rest) und eine zur $\mathfrak{G}'_{\frac{q+1}{2}}$ (Nichtrest). Thetareihen zur $\mathfrak{G}_{\frac{q+1}{2}}$ (Rest) erhält man nach Satz 54 aus den quadratischen Formen der Diskr. -11 in 10 Variabeln

$$(141)\qquad \begin{cases} Q = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{10} x_i^2 + \dfrac{1}{2}\left(\sum_{1}^{10} x_i\right)^2 \\ B = Q_2 + Q_8, \end{cases}$$

wo Q_8 die Form mit Diskr. 1 und Q_2 die binäre Form bedeutet. Zwischen diesen beiden Thetareihen, der Spitzenform (129)

$$\frac{1}{2}\vartheta_5 = \frac{1}{2}\sum_{\mu} \mu^4 z^{\mu\bar{\mu}} = z + 7z^3 + 16z^4 + \ldots$$

und der zugehörigen Eisenstein-Reihe

$$E(\tau) = \frac{11}{1275}\left(q^4 E_1(\tau) + E_2(\tau)\right)$$

besteht die einzige Relation

$$1275\,E(\tau) + 15\cdot 11\,\vartheta(\tau, B) - 15\cdot 96\,\vartheta(\tau, Q) - 16\cdot 11^3\,\vartheta_5 = 0. \tag{142}$$

Nach dem Siegelschen Satz ist $E(\tau)$ durch die Reihen zur Diskr. -11^3 darstellbar; es existiert also mindestens noch eine weitere Thetareihe dieser Art. Die Anwendung des Operators H zeigt dann, dass aus diesen drei Formen und ihren Adjungierten alle 5 unabhängigen Modulformen des Typus erzeugbar sind.

Das System der quadratischen Formen dieses Typus mit Diskr. -11 und ihrer Adjungierten (Diskr. -11^9) ist also abgeschlossen, und durch deren Thetareihen sind alle 5 Modulformen dieses Typus darstellbar.

Das gleiche gilt aber auch für das Paar von Diskr. -11^3, -11^7. Zunächst entstehen aus den drei unabhängigen Funktionen $\vartheta\left(\tau, Q_8^{(i)}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$ mit Diskr. q^2 (aus Beispiel 11) drei unabhängige Reihen unseres Typus

$$\vartheta\left(\tau, Q_2 + Q_8^{(i)}\right) = \vartheta_1 \cdot \vartheta\left(\tau, Q_8^{(i)}\right). \quad i = 1, 2, 3. \tag{143}$$

Ist ferner Q_6 eine Form mit $f = 6$, Diskr. $-q$ und $j(\tau)$ wieder durch (121) definiert, so ist

$$f(\tau) = \vartheta(\tau, Q_6)\cdot j(\tau)$$

ebenfalls in der Schar der Thetas zur Diskr. $-q^3$ enthalten, aber linear unabhängig von den drei Funktionen (143). Andernfalls müsste sie durch ϑ_1 teilbar sein. Da aber $\vartheta_1(\tau)$ in beiden Spitzen von $\Gamma_0(11)$ von 0 verschieden ist, während $j(\tau) = \sqrt[12]{\Delta(\tau)\cdot\Delta(11\tau)}$ nur in den Spitzen verschwindet, so müsste

$$\frac{\vartheta(\tau, Q_6)}{\vartheta_1} = \alpha\vartheta_1^2 + \beta j$$

eine Form des Typus $(-2, 11, 1)$ sein. Aus dem Verhalten bei dem Operator H sieht man, dass dies nicht möglich ist. Mithin haben wir in $f(\tau)$ und den drei Funktionen (143) vier unabhängige Thetas zur Diskr. -11^3. Die fehlende Eisenstein-Reihe wird dann durch die adjungierten Formen geliefert, und damit ist alles bewiesen.

Beispiel 14. $f = 12$, **Stufe** $q = 11$. In allen bisherigen Beispielen traten bei den kanonischen Produkten keine höheren Irrationalitäten als solche vom 2. Grade auf. Ich teile deshalb hier noch einen anderen Fall mit. Die Funktionen vom Haupttypus $(-6, 11, 1)$ lassen sich leicht alle durch Thetareihen darstellen. Es gibt hier vier Spitzenformen. Die Matrix $\lambda(2)$ für das System dieser Spitzenformen habe ich berechnet. Für ihre charakteristische Funktion finde ich

$$|\lambda(2) - x\,\mathrm{E}| = (x+4)(x^3 - 90\,x + 4 \cdot 47).$$

Das kubische Polynom hat die Diskr.

$$4^3 \cdot 90^3 - 4^4 \cdot 47^2 \cdot 27 = 4^4 \cdot 3^3 \cdot 19 \cdot 239.$$

Die Wurzeln sind also reelle nicht-Abelsche Zahlen.

Zum Schluss beweise ich für einige Werte der Stufe q noch einen allgemeineren Vollständigkeitssatz: Jede Modulform eines reellen Typus der Stufe $q = 11$ ist durch die Thetareihen des betr. Typus linear darstellbar. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für die ersten Werte der Dimension $-k$ ist der Satz durch die obigen Beispiele erledigt. Daraus zeigt man zunächst, dass man jede Modulform eines reellen Typus durch Addition einer passenden Thetareihe in eine Spitzenform überführen kann. Eine solche ist aber durch $j(\tau)$ teilbar, weil $j(\tau) = \sqrt[12]{\Delta(\tau) \cdot \Delta(11\tau)}$

nur in den beiden Spitzen, und zwar von 1. Ordnung verschwindet. Jene Spitzenform hat also die Gestalt $j(\tau) \cdot F(\tau)$, wo $F(\tau)$ eine Form der Dimension $-(k-2)$ ist, woraus die Behauptung folgt.

Der gleiche Satz mit einem ähnlichen Beweis gilt aber auch für die Stufen

$$q = 3, 5, 7, 11, 23.$$

Das sind die Primzahlen q, wo $q+1$ ein Teiler von 24 ist und daher

$$\sqrt[q+1]{\Delta(\tau) \cdot \Delta(q\tau)}$$

eine Modulform ganzzahliger Dimension $-\dfrac{24}{q+1}$ ist, die nur in den Spitzen, und von 1. Ordnung, verschwindet. Der interessanteste Fall ist $q = 23$, wo das Geschlecht p_0 von $\Gamma_0(q)$ gleich 2 ist und bereits zur Dimension -1 zwei Formen des reellen Typus existieren.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, dass die Kenntnis einzelner Koeffizienten der kanonischen Produkte zu gegebenem Typus $\left(-k, N, \varepsilon(n)\right)$ erlaubt, die Darstellungszahlen $a(n, Q)$ für jede Form Q dieses Typus für unendlich viele n explizit anzugeben. Zunächst ist ja der asymptotische Wert von $a(n, Q)$ schon durch die klassische Theorie bekannt — es ist der Koeffizient einer durch das Geschlecht von Q bestimmten Eisenstein-Reihe — sodass nur noch das Fehlerglied $\omega(n)$ interessiert. Sobald nun in den kanonischen Produkten $\sum\limits_1^\infty c(n)\, n^{-s}$ dieses Typus für eine Primzahl p die Koeffizienten $c(p)$ bekannt sind, lässt sich $c(p^r)$ und damit auch $\omega(p^r)$ für alle ganzen r angeben. Denn

$$(144) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} c(p^r)\, x^r = \frac{1}{1 - x\, c(p) + p^{k-1}\, \varepsilon(p)\, x^2}.$$

Geht p in der Stufe N auf, so ist

$$\varepsilon(p) = 0, \quad c(p^r) = c(p)^r.$$

Weiterhin sei p kein Teiler der Stufe N. Dann ist nach Herrn Petersson

$$c(p)\sqrt{\varepsilon(p)} \text{ reell.}$$

Daher hat der Nenner in (144) eine Doppelwurzel, wenn

$$(145) \quad \begin{cases} |c(p)|^2 = 4p^{k-1}, \text{ dann ist} \\ c(p^r)^* = (r+1)\alpha^r \text{ mit } \alpha = p^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{\varepsilon(p)} = \frac{1}{2}c(p). \end{cases}$$

Ist dagegen

$$|c(p)|^2 \neq 4p^{k-1},$$

so seien α, α' die beiden verschiedenen Wurzeln von

$$x^2 - c(p)x + p^{k-1}\varepsilon(p) = 0.$$

Damit ergibt sich

$$c(p^r) = \frac{\alpha^{r+1} - \alpha'^{r-1}}{\alpha - \alpha'}.$$

Nun ist $\sqrt{\varepsilon(p)}$ gleich 1 oder i, und $\beta = \alpha\sqrt{\varepsilon(p)}$, $\beta' = \alpha'\sqrt{\varepsilon(p)}$ sind die Wurzeln des reellen Polynoms

$$y^2 - c(p)\sqrt{\varepsilon(p)}\,y + p^{k-1} = 0.$$

Diese Wurzeln sind reell und dann von verschiedenem Betrage, wenn

$$(146) \qquad |c(p)|^2 > 4p^{k-1}.$$

Die grössere von ihnen, etwa β, hat

$$|\beta| = |\alpha| > p^{\frac{k-1}{2}}.$$

Dagegen sind β, β' konjugiert-komplex und von gleichem Betrage:

$$(147) \quad |\beta| = |\beta'| = |\alpha| = |\alpha'| = p^{\frac{k-1}{2}}, \text{wenn } |c(p)|^2 < 4p^{k-1}.$$

Der asymptotische Wert von $c(p^r)$ für $r \to \infty$ gibt also Aufschluss über das Bestehen der Ungleichungen (146), (147). In allen mir bekannten Fällen habe ich gefunden, dass β, β' nicht reell sind, also (147) gilt. Das beste bekannte Resultat ist nach Rankin[1] $c(n) = O\left(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{5}}\right)$.

[1] Siehe oben S. 89, Note 2.

Indleveret til Selskabet den 12. April 1940.
Færdig fra Trykkeriet den 21. September 1940.